Частина I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ

Глава 1

АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ

Приклад. Обчислити

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0{,}8}-0{,}6\right)\left(\frac{\left(42\cdot 3\frac{5}{6}+3{,}3:0{,}03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0{,}625-0{,}84:0{,}8\right):0{,}03}\right)^{-1}.$$

△ Позначимо вираз у перших дужках через A, а в других — через B. Послідовно знаходимо:

$A=\frac{928}{80}-0{,}6=11{,}6-0{,}6=11;$

чисельник дробу B: 1) $42\cdot 3\frac{5}{6}=42\cdot 3+\frac{42\cdot 5}{6}=161;$ 2) $3{,}3:0{,}03=110;$ 3) $(161+110)\cdot 15=271\cdot 15;$

знаменник дробу B: 1) $\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=6;$ 2) $\frac{84}{80}=\frac{21}{20};$ 3) $\left(6-\frac{21}{20}\right)\cdot\frac{100}{3}=200-35=165;$

$B=271\cdot\frac{15}{165}=\frac{271}{11}.$

Остаточно дістаємо $A:B^{-1}=A\cdot B=11\cdot\frac{271}{11}=271.$ ▲

У задачах цієї глави треба виконати вказані дії, не користуючись мікрокалькулятором, не роблячи заокруглень і наближених обчислень, оскільки припускається, що задані числа є точними.

Обчислити (1.001—1.040):

1.001. $\frac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$

1.002. $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\frac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}.$

1.003. $\frac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$

1.004. $\left(\dfrac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,4):\frac{3}{70}}+0,125\right):2\frac{1}{2}+0,43.$

1.005. $\dfrac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}.$

1.006. $\dfrac{\left(13,75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1,2}{\left(10,3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6,8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}.$

1.007. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0,1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0,1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2,52}{\left(0,5-\frac{1}{3}+0,25-\frac{1}{5}\right):\left(0,25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}.$

1.008. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\cdot 5,2\right):\left(\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7\right).$

1.009. $\dfrac{0,4+8\left(5-0,8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8,9-2,6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$

1.010. $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0,75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\dfrac{0,3:0,01}{70}+\dfrac{2}{7}.$

1.011. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0,425-0,005\right):0,1}{30,5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\dfrac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0,05.$

1.012. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1,9+19,5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0,16}:\dfrac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0,5\left(1\frac{1}{20}+4,1\right)}.$

1.013. $$\frac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0,6-0,005\right)\right)\cdot 1,7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4,75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0,25.$$

1.014. $$\frac{\left(4,5\cdot 1\frac{2}{3}-6,75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0,3+5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right):2\frac{2}{3}}+\frac{1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,3-0,96}{\left(0,2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1,6}.$$

1.015. $$\frac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}.$$

1.016. $$\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2,2\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}.$$

1.017. $$\frac{0,128:3,2+0,86}{\frac{5}{6}\cdot 1,2+0,8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3,6}{0,505\cdot\frac{2}{5}-0,002}.$$

1.018. $$\frac{3\frac{1}{3}:10+0,175:0,35}{1,75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1,4}{\left(0,5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}.$$

1.019. $$\frac{0,125:0,25+1\frac{9}{16}:2,5}{(10-22:2,3)\cdot 0,46+1,6}+\left(\frac{17}{20}+1,9\right)\cdot 0,5.$$

1.020. $$\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0,6:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+3,75:1\frac{1}{2}\right):2,2.$$

1.021. $$\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

1.022. $$\frac{0,5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0,125}{\frac{1}{3}+0,4+\frac{14}{15}}+\frac{(3,75-0,625)\cdot\frac{48}{125}}{12,8\cdot 0,25}.$$

1.023. $$\left(26\frac{2}{3}:6,4\right)\left(19,2:3\frac{5}{9}\right)-\frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0,5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\frac{1}{18}.$$

1.024. $\dfrac{0{,}725+0{,}6+\dfrac{7}{40}+\dfrac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\dfrac{1}{4}-0{,}0345:\dfrac{3}{25}}\cdot 0{,}25.$

1.025. $\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217+2\dfrac{3}{7}\right)-$
$-\left(31{,}5:12\dfrac{3}{5}+114\cdot 2\dfrac{1}{3}+61\dfrac{1}{2}\right).$

1.026. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\dfrac{16}{17}}{\dfrac{5}{18}\cdot\left(1\dfrac{7}{85}+6\dfrac{2}{17}\right)}+0{,}5\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\dfrac{1}{2}}\right).$

1.027. $\left(\dfrac{3{,}75+2\dfrac{1}{2}}{2\dfrac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\dfrac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}.$

1.028. $((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\dfrac{2}{5}+1\dfrac{11}{21}.$

1.029. $\left(1\dfrac{2}{5}+3{,}5:1\dfrac{1}{4}\right):2\dfrac{2}{5}+3{,}4:2\dfrac{1}{8}-0{,}35.$

1.030. $\dfrac{\left(0{,}3275-\left(2\dfrac{15}{88}+\dfrac{4}{33}\right):12\dfrac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}.$

1.031. $\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{21}{45}}{1\dfrac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}}{0{,}59}.$

1.032. $\dfrac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\dfrac{7}{9}}\right)^{-2}:0{,}25}{\dfrac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64.$

1.033. $\dfrac{\left(\dfrac{5}{8}+2\dfrac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\dfrac{23}{30}+\dfrac{4}{11}\right)\cdot\dfrac{110}{401}}\cdot 0{,}5.$

1.034. $\dfrac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\dfrac{1}{5}:0{,}25-1\dfrac{5}{6}\right)\cdot 1\dfrac{1}{4}}:0{,}125.$

1.035. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$$

1.036. $$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

1.037. $$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

1.038. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

1.039. $$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+$$
$$+1{,}364:0{,}124.$$

1.040. $$5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$$

Знайти X із пропорції (1.041—1.045):

1.041. $$\frac{\left(4-3{,}5\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$$

1.042. $$\frac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}.$$

1.043. $$\frac{0{,}125X}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$$

1.044. $$\frac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

1.045. $$\frac{15{,}2 \cdot 0{,}25 - 48{,}51 : 14{,}7}{X} = \frac{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2\frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2 + 0{,}8\left(5\frac{1}{2} - 3{,}25\right)}.$$

Обчислити найбільш раціональним способом (1.046 —1.048):

1.046. $$\frac{\sqrt{6{,}3 \cdot 1{,}7} \cdot \left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}} - \sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3 + 1{,}7)^2 - 4 \cdot 6{,}3 \cdot 1{,}7}}.$$

1.047. $$\left(\frac{\sqrt{561^2 - 459^2}}{4\frac{2}{7} \cdot 0{,}15 + 4\frac{2}{7} : \frac{20}{3}} + 4\sqrt{10}\right) : \frac{1}{3}\sqrt{40}.$$

1.048. $$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}\right)^2.$$

Обчислити:

1.049. $$\frac{2^{-2} + 5^0}{(0{,}5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4{,}75.$$

1.050. $$\frac{(0{,}6)^0 - (0{,}1)^{-1}}{(3 : 2^3)^{-1} \cdot (1{,}5)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$$

Глава 2

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ

Основні формули

Властивості степенів

Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:

$$a^0 = 1; \quad (2.1) \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad (2.2)$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \quad (2.3) \qquad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (2.4)$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad (2.5) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad (2.6) \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (2.7)$$

Многочлени

Для будь-яких a, b і c справедливі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (2.8)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (2.9)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (2.10)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
або
$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b); \tag{2.11}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
або
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b); \tag{2.12}$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{2.13}$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{2.14}$$
$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2), \tag{2.15}$$
де x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n і k, більших 1, і будь-яких невід'ємних a і b справедливі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad (2.16) \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad (2.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad (2.18) \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \quad (2.19)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad (2.20) \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geqslant 0); \quad (2.21)$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ якщо } 0 \leqslant a < b; \quad (2.22) \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad (2.24) \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geqslant 0). \quad (2.25)$$

Приклад 1. Спростити вираз
$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

△ Позначимо дріб через A, а вираз у дужках — через B; тоді заданий вираз набуває вигляду $A + 2B$. Зазначимо, що для $\sqrt{3x}$ і $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимими є тільки значення $x \geqslant 0$, при яких знаменник дробу A не дорівнює нулю. Тому і для заданого виразу допустимими є тільки значення $x \geqslant 0$.

Використовуючи формулу (2.9), виділимо в чисельнику дробу A повний квадрат:
$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$
Оскільки $x \geqslant 0$, то, згідно з рівністю (2.21), маємо $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тоді знайдений вираз за допомогою формули (2.8) можна розкласти на множники як різницю квадратів:
$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$
Отже,
$$A = \frac{(x^2 - \sqrt{3x} + 1)(x^2 + \sqrt{3x} + 1)}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} = x^2 - \sqrt{3x} + 1.$$

Далі, за формулою (2.20) маємо $\sqrt[6]{27x^3} = \sqrt[6]{(3x)^3} = \sqrt{3x}$, звідки $B = \sqrt{3x} - \frac{1}{2}$. Таким чином, $A + 2B = x^2 - \sqrt{3x} + 1 + 2\sqrt{3x} - 1 = x^2 + \sqrt{3x}$. ▲

Приклад 2. Спростити вираз

$$\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b}, \quad 0 < a < 2b.$$

△ Маємо $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} = \sqrt{(a-2b)^2} = |a - 2b| = 2b - a$, $\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2} = |a + 2b| = a + 2b$; тут використано формули (2.9), (2.10) і (2.23). Отже, $\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} = \frac{2b - a}{2b + a}$. Тепер знаходимо

$$\frac{2b - a}{2b + a} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b} =$$

$$= \frac{(2b - a)(a - 2b) - 8ab + 2b(a + 2b)}{a^2 - 4b^2} = \frac{a}{2b - a}. \ ▲$$

Приклад 3. Спростити вираз

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5 + (x - 5)\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4x - 5 + (x + 5)\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

△ Використовуючи формулу (2.15), розкладемо на множники тричлени в чисельнику і знаменнику дробу:

$$f(x) = \frac{(x + 5)(x - 1) + (x - 5)\sqrt{x^2 - 1}}{(x - 5)(x + 1) + (x + 5)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Оскільки $x > 1$, то, згідно із співвідношенням (2.21), маємо $x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$ і $x + 1 = \sqrt{(x + 1)^2}$. Отже,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}\,((x + 5)\sqrt{x - 1} + (x - 5)\sqrt{x + 1})}{\sqrt{x + 1}\,((x - 5)\sqrt{x + 1} + (x + 5)\sqrt{x - 1})},$$

звідки після скорочення дістанемо $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$. ▲

Приклад 4. Не вдаючись до наближених обчислень, спростити числовий вираз

$$A = (4\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13 + 4\sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} - 1}{11}}.$$

△ Використовуючи формули (2.16), (2.8), (2.20) і (2.10), знаходимо:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=$

$$=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\ \frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{121}}=1.$$

Остаточно дістаємо $A=4-1=3$. ▲

Приклад 5. Перевірити справедливість рівності

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

△ Покладемо $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Піднесемо до куба обидві частини цієї рівності. Використовуючи формулу (2.11), дістаємо

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\,x=x^3,$$

або $x^3+3x-76=0$. За допомогою підстановки $x=4$ впевнюємося в тому, що $x=4$ є одним з коренів кубічного рівняння: $64+12-76=0$.

Перетворимо кубічне рівняння до вигляду $x^3-64=3(4-x)$; $(x-4)(x^2+4x+16)+3(x-4)=0$, $(x-4)(x^2+4x+19)=0$. Але співмножник $x^2+4x+19$ не має дійсних коренів. Отже, 4 — єдино можливе дійсне значення для x, що і доводить задану рівність (оскільки очевидно, що $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — дійсне число). ▲

Приклад 6. Перевірити справедливість рівності

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

△ Розглянемо рівність

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, що коли вона виконується, то виконується і задана рівність. Нехай $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Неважко впевнитися, що $a>0$ і $b>0$. Якщо при цьому виконується рівність $a^2=b^2$, то $a=b$. Знаходимо

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=$$

$$=7+4\sqrt{3},\ b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Оскільки $a^2=b^2$, то $a=b$, тобто задана рівність справедлива.

Цей приклад можна розв'язати швидше, якщо здогадатися, що обидва підкореневі вирази в умові є квадратами додатних чисел, а саме: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ і $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тоді лівою частиною заданої рівності є

$$\frac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3},\ і\ 2=2.\ ▲$$

Приклад 7. Чому дорівнює сума виразів $\sqrt{24-t^2}$ і $\sqrt{8-t^2}$, якщо відомо, що їхня різниця дорівнює 2 (значення змінної t знаходити не потрібно)?

△ Згідно з умовою, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Використовуючи формулу $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, дістаємо $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=$ $=\frac{24-8}{2}=8$. ▲

Група А

Спростити вирази і обчислити їх, якщо задано числові значення параметрів (2.001—2.124):

2.001. $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

2.002. $((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}):\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}.$

2.003. $\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right);\quad a>b>0.$

2.004. $\left(\frac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\frac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6};\quad b=0{,}04.$

2.005. $\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$

2.006. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}.$

2.007. $\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}.$

2.008. $\left(\left(\frac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5.$

2.009. $\dfrac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}$.

2.010. $t\cdot\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\dfrac{4}{\sqrt{t+4}}$.

2.011. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

2.012. $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$.

2.013. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

2.014. $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

2.015. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

2.016. $\left(\dfrac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$.

2.017. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$.

2.018. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}(5-2x^2);\ x=\sqrt{3{,}92}$.

2.019. $\dfrac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2});\quad x=64$.

2.020. $\sqrt{\dfrac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4+8/a+4/a^2}{\sqrt{2}}}$.

2.021. $\dfrac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$. **2.022.** $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2/\sqrt{x}}$.

2.023. $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.024. $\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.025. $$\frac{a^3-a-2b-b^2/a}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:$$
$$:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right);\quad a=23,\ b=22.$$

2.026. $$\frac{(\sqrt[5]{a^{4/3}})^{3/2}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6}.$$

2.027. $$\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

2.028. $$\frac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\frac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\frac{1}{x^2-ax}.$$

2.029. $$\frac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}.$$

2.030. $$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}.$$

2.031. $$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)(a-\sqrt{a^3})^{-1}.$$

2.032. $$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2};\quad a=0{,}04.$$

2.033. $$\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}.$$

2.034. $$1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

2.035. $$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}.$$

2.036. $$\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right).$$

2.037. $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\dfrac{2}{x^{3/2}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$.

2.038. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

2.039. $\dfrac{9b^{4/3}-\dfrac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\dfrac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$; $b=4$.

2.040. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$;

$a=0{,}02,\ b=-11{,}05,\ c=1{,}07.$

2.041. $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\dfrac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\dfrac{a^2+2}{1-a^3}$.

2.042. $\dfrac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$;

$a=0{,}32,\ x=0{,}08.$

2.043. $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}$.

2.044. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$;

$x>a>0.$

2.045. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}$.

2.046. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$.

2.047. $\dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a)$.

2.048. $\dfrac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\dfrac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$; $p=0{,}78,\ q=7/25.$

2.049. $\left(\dfrac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\dfrac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\dfrac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\dfrac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\right.$

$\left.-\dfrac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)$.

2.050. $\dfrac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

2.051. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:$

$$:\frac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}};\quad a=4{,}91,\ b=0{,}09.$$

2.052. $\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\dfrac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:$

$$:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}).$$

2.053. $((1-p^2)^{-1/2}-(1+p^2)^{-1/2})^2+2(1-p^4)^{-1/2}$.

2.054. $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

2.055. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right)$.

2.056. $\left(\dfrac{4}{a+\dfrac{1}{b+1/c}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\dfrac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}$.

2.057. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

2.058. $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right);$

$$a=1\frac{33}{40},\ b=0{,}625,\ c=3{,}2.$$

2.059. $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+y/x}$.

2.060. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}$.

2.061. $\left(x^2+2x-\dfrac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{2x^2+x+2}{3x+1}\right);\quad x=7{,}(3)$.

2.062. $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right)$.

2.063. $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

2.064. $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

2.065. $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$

2.066. $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}.$

2.067. $\dfrac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}.$

2.068. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}};\quad a=7{,}4,\ b=\dfrac{5}{37}.$

2.069. $\dfrac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}.$

2.070. $\dfrac{(a^2-b^2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}.$

2.071. $\dfrac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}.$

2.072. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}.$

2.073. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}.$

2.074. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}.$

2.075. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/(mn)}}.$

2.076. $\dfrac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2{,}4}\cdot(\sqrt{15}+3).$

2.077. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1};$

$a=1-\sqrt{2},\ b=1+\sqrt{2}.$

2.078. $\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\times\frac{(t-3)^2+12t}{2}.$

2.079. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}\right)^2\times\sqrt[4]{\frac{m^2}{4}}.$

2.080. $\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}.$

2.081. $\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}.$

2.082. $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+1/c}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}.$

2.083. $\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right).$

2.084. $\left(\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right);$
$a=\sqrt{2}+0,8,\ b=\sqrt{2}-0,2.$

2.085. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

2.086. $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$

2.087. $\frac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$

2.088. $(\sqrt{1-x^2}+1):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right).$

2.089. $\frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\times\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}.$

2.090. $\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$

2.091. $\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}.$

2.092. $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}$.

2.093. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+2\right)$.

2.094. $\dfrac{m^{4/3}-27m^{1/3}n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$.

2.095. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\,z^{\frac{3}{3p-p^2}}$.

2.096. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

2.097. $\dfrac{(\sqrt{x}+2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\dfrac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}$.

2.098. $\dfrac{1-\sqrt{2t}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}$.

2.099. $\dfrac{(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3})}{(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$.

2.100. $\dfrac{(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z})^2(1+\sqrt{z})^2}{z-2+\dfrac{1}{z}}-z\sqrt{z}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{z}+4+z}$.

2.101. $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}$.

2.102. $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\dfrac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^2}}$.

2.103. $(\sqrt{ab}-ab(a+\sqrt{ab})^{-1}):(2((ab)^{1/2}-b)(a-b)^{-1})$.

2.104. $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{b-\dfrac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^6}-\dfrac{4}{b^3}}+\right.$

$\left.+\dfrac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\dfrac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}$.

2.105. $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{2}+\sqrt{1-x^2}$.

2.106. $$\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\times\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}};\quad a=4/3,\ b=0,25.$$

2.107. $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right);\quad x=\frac{1}{a-1}.$$

2.108. $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right);\quad a=0,75,\ b=4/3.$$

2.109. $$\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+\left(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}}\right)^2+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3;\quad a=3\frac{4}{7},\ x=0,28.$$

2.110. $$\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right);\quad c=2,\ d=1/4.$$

2.111. $$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$$

2.112. $$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}\right).$$

2.113. $$\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}.$$

2.114. $$\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4.$$

2.115. $$4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)\cdot a^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$$

2.116. $\left(\left(\sqrt{mn}-\frac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\frac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:$

$:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}.$

2.117. $\left((a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}(a^{3/2}-b^{3/2})-\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}\right):$

$:\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+(a(1-a^2)^{-1/2})^2}.$

2.118. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}.$

2.119. $\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}.$

2.120. $\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}.$

2.121. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}.$

2.122. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}.$

2.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}.$

2.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}.$

Перевірити справедливість рівностей (2.125—2.134):

2.125. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}).$

2.126. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2.$

2.127. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8.$

2.128. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}.$

2.129. $\frac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{2}{\sqrt{2}}+2}=-1.$

2.130. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}.$

2.131. $\left(\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\dfrac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}.$

2.132. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$

2.133. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$

2.134. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$

Зробити вказану підстановку і результат спростити (2.135—2.145):

2.135. $\dfrac{x^3-a^{-2/3}b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{1/2}}{b^{3/2}x^2};\quad x=a^{2/3}b^{-1/2}.$

2.136. $\dfrac{1-b}{\sqrt{b}}\cdot x^2-2x+\sqrt{b};\quad x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}.$

2.137. $\left(\dfrac{x+2b}{x-2b}+\dfrac{x+2a}{x-2a}\right):\dfrac{x}{2};\quad x=\dfrac{4ab}{a+b}.$

2.138. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4);\quad x=\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}.$

2.139. $\dfrac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23};\quad z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

2.140. $\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)};\quad x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}.$

2.141. $\dfrac{(1-y)(y+2)}{y^2(y+1)^2};\quad y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

2.142. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}};\quad x=\sqrt{6}.$

2.143. $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}};\quad x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right);\ a>b>0.$

2.144. $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}};\quad x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right);\ a>0,b>0.$

2.145. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$; $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$;

$$0<b/2<a<b.$$

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу (2.146—2.151):

2.146. $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$. 2.147. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

2.148. $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. 2.149. $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

2.150. $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. 2.151. $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

2.152. Показати, що коли

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

то $z^3+3bz-2a=0$.

2.153. Якщо $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чому дорівнює $\sqrt{(8-a)(5+a)}$?

2.154. Чому дорівнює сума $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, коли відомо, що $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ (величину x знаходити не потрібно)?

2.155. Перетворити вираз $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ так, щоб дістати $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

2.156. Обчислити суму кубів двох чисел, якщо їхня сума і добуток відповідно дорівнюють 11 і 21.

2.157. Обчислити значення виразу:

а) $\dfrac{z^3}{3}-z$, $z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

б) x^3+3x, $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Група Б

Спростити вирази і обчислити їх, якщо задано числові значення параметрів (2.158—2.284):

2.158. $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$.

2.159. $\left(\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):(a^{1/4}+b^{1/4})$.

2.160. $\dfrac{(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4})^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}$.

2.161. $\dfrac{a^3-3a^2+4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}$; $a>1$, $a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2.162. $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$.

2.163. $\left(\dfrac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}$.

2.164. $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$; $x>3$.

2.165. $\dfrac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}}$; $t>2$.

2.166. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

2.167. $\dfrac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$.

2.168. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

2.169. $(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}$.

2.170. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

2.171. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

2.172. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\times$

$\times\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\dfrac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right)$.

2.173. $\dfrac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

2.174. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)|x-2|}$.

2.175. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$.

2.176. $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$.

2.177. $\dfrac{2x-x|x-1|+x|x|+3}{|x|+x^2}$.

2.178. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

2.179. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$. **2.180.** $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

2.181. $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}$.

2.182. $\dfrac{(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2))((ax+by)^2-4abxy)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.

2.183. $\dfrac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$. **2.184.** $\dfrac{2|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$.

2.185. $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$.

2.186. $\dfrac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\dfrac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$.

2.187. $\dfrac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\dfrac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$.

2.188. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot|2x^2-x-1|}$. **2.189.** $\dfrac{|r-1|\cdot|r|}{r^2-r+1-|r|}$.

2.190. $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\dfrac{1}{z-2}\right):\dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$.

2.191. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$.

2.192. $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{a}+a}$.

2.193. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$.

2.194. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

2.195. $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{a^2}}$.

2.196. $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\frac{|x-1|}{x-1}$. 2.197. $\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$.

2.198. $\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}$; $b>2$.

2.199. $$\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right): (\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}).$$

2.200. $$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right).$$

2.201. $$\sqrt{\frac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot(p+\sqrt[6]{p^3q^2})^{-1/2}.$$

2.202. $$\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}.$$

2.203. $$\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2}\cdot(2x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}.$$

2.204. $$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$$
$$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

2.205. $$\left(\frac{bx+4+\frac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\frac{(4x^2-b^2)\frac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\frac{bx}{2}.$$

2.206. $$\frac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:$$
$$:\frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}.$$

2.207. $$\frac{(x^2-3x+2)^{-1/2}-(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2}+(x^2+3x+2)^{-1/2}}-1+$$
$$+\frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x}.$$

2.208. $$\frac{((\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}.$$

2.209. $$\left(\frac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}.$$

2.210. $$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}.$$

2.211. $$(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}.$$

2.212. $$(x^4-7x^2+1)^{-2}\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right);\quad x=\frac{\sqrt[4]{125}}{5}.$$

2.213. $$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x}}.$$ **2.214.** $$\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}.$$

2.215. $$\left((z-3)(z+3)^{-1}-\frac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{3}-\frac{z}{18}-\frac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}.$$

2.216. $$\frac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}.$$

2.217. $$\frac{b^{-1/6}\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\sqrt[6]{a^9b^4}}:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right).$$

2.218. $$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}.$$

2.219. $$\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}.$$

2.220. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$.

2.221. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}$.

2.222. $\left(\dfrac{2-n}{n-1}+4\cdot\dfrac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\dfrac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\dfrac{2-n}{m-2}\right)$;

$m=\sqrt[4]{400},\ n=\sqrt{5}$.

2.223. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$.

2.224. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|$.

2.225. $\left(x^2-6x+1+\left(\dfrac{\dfrac{x-3}{1+3x}-\dfrac{x-5}{1+5x}}{1+\dfrac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$.

2.226. $\left(\dfrac{1}{(x+3)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{2}{(x+3)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}$.

2.227. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$.

2.228. $\sqrt{\left(y^2+\dfrac{4}{y^2}\right)^2-8\left(y+\dfrac{2}{y}\right)^2+48}$.

2.229. $\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}$; $x=2$.

2.230. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}$; $x=3$.

2.231. $\dfrac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\dfrac{1-z}{1-\sqrt{1-z}}$; $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.232. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

2.233. $$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$$

2.234. $$\frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1};\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.235. $$\frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}};\quad x=\frac{a^2+1}{2a}.$$

2.236. $$\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z};\quad z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

2.237. $$\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2};\quad x=\frac{a^3+1}{a^3-1}.$$

2.238. $$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$$

2.239. $$\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}.$$

2.240. $$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}.$$

2.241. $$\left(\frac{4-2x+x^2}{4-2x}+\frac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\frac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}\times(x+2).$$

2.242. $$\left(\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}.$$

2.243. $$\left(\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\frac{9}{x^4}\right):\frac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}.$$

2.244. $$\frac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}\,(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1+2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right).$$

2.245. $$\frac{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}+((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}-((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}.$$

2.246. $$\frac{(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})-y\sqrt[4]{y})\,(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\,((\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2+\sqrt[4]{xy})}.$$

2.247. $$\frac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{(1-\sqrt[3]{a})\,((\sqrt[3]{a}+1)^2-\sqrt[3]{a})\,(b^{1/3}+1)}+ \sqrt[3]{ab}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right).$$

2.248. $$\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\times \sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$$

2.249. $$\sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2+(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}: \frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})\,(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}.$$

2.250. $$\left(\frac{2\,(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}\right)^{1/2}- (\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1}\cdot\sqrt{a+2}.$$

2.251. $$\frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2+(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}}: \frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}.$$

2.252. $$\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\dfrac{a^3}{b}-2a+\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{ab}}};$$
$a=4{,}8,\quad b=1{,}2.$

2.253. $$(4x-1)\left(\frac{1}{8x}\left((\sqrt{8x-1}+4x)^{-1}-(\sqrt{8x-1}-4x)^{-1}\right)\right)^{1/2}.$$

2.254. $$\left(\frac{x+2y}{8y^3\,(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+ \left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right);\quad x=\sqrt[4]{6},\quad y=\sqrt[8]{2}.$$

2.255. $$\frac{2\,(a+(a+1)+(a+2)+\cdots+2a)}{a^2+3a+2}+ \frac{6\,(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a+b)^{0,6}\,(a+2)}:((a^{1/2}-b^{1/2})\,(a-b)^{-2/5})^{-1},\quad a\in \mathbb{N}.$$

2.256. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}{(x+x^{-1}-2)\cdot a^{-1/4}}-$
$$-\frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-1/2}}.$$

2.257. $((a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2})(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}+$
$$+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}.$$

2.258. $\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab})(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:$
$$:\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot b^{-1/4}}.$$

2.259. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\dfrac{8z^3-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-$
$$-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2z}{27}-\frac{1}{6z}}\right)^{-1}.$$

2.260. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\dfrac{2q^2}{p^2-q^2}\right)(p^3-pq^2)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\dfrac{p}{p-q}-\dfrac{q}{p+q}-\dfrac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}.$

2.261. $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\times$
$$\times\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$$

2.262. $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{(2+\sqrt[3]{ab})^2-(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b})^2};\quad a=\sqrt[7]{3},\quad b=\sqrt{0{,}008}.$

2.263. $\dfrac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}.$ 2.264. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}.$

2.265. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\dfrac{b}{a}-\dfrac{\sqrt{b}}{a}}}};\quad a=1{,}21.$

2.266. $\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4b+1}{a}}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}};$
$$a=2{,}25.$$

2.267. $$\frac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot(xy^{-2}+y^{-3/2})}{2x^2-y^{-3/2}-xy+2xy^{1/2}}.$$

2.268. $$\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x}).$$

2.269. $$\frac{a^{3/2}+a^{3/4}-(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2})}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})}\cdot(a^2-a^{5/4}+a^{1/2})^{-1}}.$$

2.270. $$\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}.$$

2.271. $$\left(\frac{3^{3/2}+\frac{1}{8}z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\frac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}.$$

2.272. $$\frac{(\sqrt{q^3}:\sqrt{p}+p)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}+1}\right)^{1/4}}.$$

2.273. $$\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}.$$

2.274. $$\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\times\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}.$$

2.275. $x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^3y(7+4\sqrt{3})}.$

2.276. $$\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}\,(\sqrt{a}+1)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}.$$

2.277. $$\left(\frac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}\cdot(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})+\frac{3\sqrt{b}\,(a^{1/2}-b)}{a^{-1/4}(a^{1/4}-\sqrt{b})}\right)^{-1/3}:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}.$$

2.278. $$\left(\sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}.$$

2.279. $$\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\cdot\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right);\quad a>b>0.$$

2.280. $$\frac{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}.$$

2.281. $$\left(\frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}}-\frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\frac{\frac{1}{3}a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}.$$

2.282. $$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right);\quad 0<x<1.$$

2.283. $$\frac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}.$$

2.284. $$\sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}};\quad y=\sqrt{ab}.$$

2.285. Спростити вираз $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, а потім побудувати графік функції y для $1\leqslant x<\infty$.

2.286. При якому значенні k многочлен $x^2+2(k-9)x+(k^2+3k+4)$ можна записати у вигляді повного квадрата.

2.287. При яких значеннях a і b тричлен $16x^2+144x+(a+b)$ є повним квадратом, коли відомо, що $b-a=-7$?

2.288. Перевірити, що число $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ є коренем рівняння $x^3+12x-8=0$.

2.289. Многочлен x^8-16 подати у вигляді добутку многочленів другого степеня.

2.290. Виключивши u і v з рівностей $u-v=a$, $u^2-v^2=b$, $u^3-v^3=c$, знайти співвідношення між a, b і c.

Перевірити справедливість рівностей (2.291—2.304):

2.291. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

2.292. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=$
$$=\sqrt{20-4\sqrt{5}}.$$

2.293. $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):$
$$:(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5})+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}.$$

2.294. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=$
$$=2\sqrt{3m-n}.$$

2.295. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

2.296. $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-1/3}}=2\sqrt{a-1}.$

2.297. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1.$

2.298. $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

2.299. $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

2.300. $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$

2.301. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

2.302. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

2.303. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

2.304. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=$
$$=2\sqrt{5p-q}.$$

2.305. Перетворенням лівої частини перевірити, що:

а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2;$

б) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

2.306. Число 19 подати у вигляді різниці кубів натуральних чисел. Показати, що таке подання єдине.

2.307. Перетворити суму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

до найбільш простого вигляду.

2.308. Показати, що

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

2.309. Довести, що коли $a+b=1$, то

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

2.310. Визначити A, B і C так, щоб для всіх допустимих значень x мала місце рівність

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

2.311. Довести, що: а) сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9; б) число p^5-p ділиться на 5 при будь-якому натуральному значенні p; в) число k^3+5k ділиться на 3 при $k\in\mathbf{N}$.

Група В

Спростити вирази. Знайти області допустимих значень параметрів, якщо вони не вказані (2.312—2.356):

2.312. $$\left(\frac{\frac{x^3-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^3+1}}{\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)^{-1/2}.$$

2.313. $\dfrac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$. **2.314.** $|x^2-1|+x\cdot|x+1|$.

2.315. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

2.316. $(x+2\sqrt{2x-4})^{-1/2}+(x-2\sqrt{2x-4})^{-1/2}$.

2.317. $$\left(\frac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\frac{2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}}{\frac{4}{mn}-\frac{1}{n^2}-\frac{4}{m^2}}\right)^{1/2}\cdot\frac{\sqrt{mn}}{m-2n}.$$

2.318. $$\left(\sqrt{x^4-a^4}-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

2.319. $$\left(\frac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|.$$

2.320. $$\sqrt{\frac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}.$$

2.321. $\left(\dfrac{(a^{3/2}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

2.322. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2$.

2.323. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}$.

2.324. $\sqrt{\dfrac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|$.

2.325. $\dfrac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}$.

2.326. $\dfrac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}$.

2.327. $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}$.

2.328. $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}$.

2.329. $\dfrac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$. 2.330. $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$.

2.331. $\dfrac{\sqrt{3}\,x^{3/2}-5x^{1/3}+5x^{4/3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\,x^{5/6}+25x^{2/3}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$.

2.332. $\left(1-\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\dfrac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\right.$

$$\left.:\left(\dfrac{16-8x}{4-2x+x^2}-\dfrac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{1/2}.$$

2.333. $\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+12\right)^{1/4}:(z-1)$.

2.334. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\,\times$

$$\times\frac{\sqrt{a^{3/2}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{3/2}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}.$$

2.335. $\dfrac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}},\quad z=\dfrac{2a}{a^2+1}$.

2.336. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{3/2}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\,(x^{2/3}-x^{5/6}+x)}$.

2.337. $$\frac{\sqrt[3]{a-3+3(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2})}}{\sqrt{2^{-2}-\frac{3}{2}a^{-1}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2:(\sqrt[3]{9}+a^{2/3}+\sqrt[3]{3a})}}.$$

2.338. $$\frac{\sqrt[3]{8x-y-6(2\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2})}\cdot(4x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+y^{2/3})}{8x\sqrt[3]{y}-y^{4/3}}.$$

2.339. $$\left(\frac{a}{3(a^2+1)^{1/2}}-(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3})^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3})^{-1/2}\right)^2.$$

2.340. $$\frac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}.$$

2.341. $$\frac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3-1).$$

2.342. $$\frac{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}+(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}-(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}.$$

2.343. $$\frac{\sqrt{4(x-\sqrt{y})+yx^{-1}}\cdot\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[3]{4y^5}}.$$

2.344. $$\sqrt{\frac{1}{6}((3t+\sqrt{6t-1})^{-1}+(3t-\sqrt{6t-1})^{-1})}\times$$
$$\times|t-1|\cdot t^{-1/2}.$$

2.345. $$\sqrt[4]{(x^2+4x^{-2})^2-8(x+2x^{-1})^2+48}\cdot(x^2-2)^{-1}.$$

2.346. $$\left(\frac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{1/2}.$$

2.347. $$\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|};\quad x>0.$$

2.348. $$\left|\frac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot(x^2-4).$$

2.349. $$\left(\frac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}.$$

2.350. $$\frac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}\cdot(9x^{-1}+4x-12)}.$$

2.351. $$\frac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2.$$

2.352. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}$.

2.353. $(3a+\sqrt{6a-1})^{-1/2}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-1/2}$.

2.354. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}$.

2.355. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}$.

2.356. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$.

2.357. Довести, що коли для чисел x, y, z, m, n, p виконуються рівності $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$, $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}+\dfrac{p}{z}=0$, то для них виконується також і рівність $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1$.

2.358. Розкласти на множники вираз $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

2.359. Розкласти на множники вираз $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

2.360. Середнє арифметичне двох додатних чисел a і b $(a>b)$ в m разів більше від їхнього середнього геометричного. Довести, що

$$\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}.$$

Глава 3

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

Основні формули

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу (тут і далі запис $n\in\mathbf{Z}$ означає, що n — будь-яке ціле число)

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1; \qquad (3.1)$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.2)$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1,\quad x\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.4)$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.5)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.6)$$

Формули додавання

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y; \qquad (3.7)$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y; \qquad (3.8)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y; \qquad (3.9)$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y; \qquad (3.10)$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, \quad x,\ y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.11)$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, \quad x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.12)$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x=2\sin x\cos x; \qquad (3.13)$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x; \qquad (3.14)$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, \ k\in\mathbf{Z}, \quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \ n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.15)$$

Формули половинного аргументу (для функцій sin і cos — формули пониження степеня)

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}; \qquad (3.16)$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}; \qquad (3.17)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad x\neq\pi+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.18)$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (3.19)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad (3.20)$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (3.21)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad (3.22)$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, \quad x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \qquad (3.23)$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}, \quad x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}. \qquad (3.24)$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)); \qquad (3.25)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)); \qquad (3.26)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)). \qquad (3.27)$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ і $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in Z; \qquad (3.28)$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in Z. \qquad (3.29)$$

Формули зведення

	Назва функції не змінюється			Назва функції змінюється на схожу			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$			$\alpha \neq \pi n,\quad n \in Z$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha \neq \pi n,\quad n \in Z$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in Z$			

Приклад 1. Довести тотожність

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{ctg} 6\alpha = \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.$$

△ Застосовуючи послідовно до лівої частини рівності формули (3.2), (3.3), (3.1) і (3.13), знаходимо

$$A = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{ctg} 6\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} +$$

$$+ \frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin^2 6\alpha + \cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha \cos 6\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\sin 6\alpha \cos 6\alpha} = \frac{2}{\sin 4\alpha} + \frac{2}{\sin 12\alpha} =$$

$$= \frac{2(\sin 12\alpha + \sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha \sin 12\alpha}.$$

Перетворюючи суму синусів за формулою (3.19), дістаємо $A = \frac{4\sin 8\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha \sin 12\alpha}$. Оскільки $\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha$, то

$$A = \frac{8\sin 4\alpha \cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha \sin 12\alpha} = \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}. \ ▲$$

Приклад 2. Спростити вираз

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \sin\frac{\alpha}{4}.$$

△ До добутку перших двох співмножників застосуємо формулу (3.27). Тоді дістанемо

$$A = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Знову використовуючи формулу (3.27), знаходимо

$$A = \frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{3\alpha}{4}\right) + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}. \ ▲$$

Приклад 3. Подати у вигляді добутку

$$A = 2\cos^2 3\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha - 1.$$

△ Згідно з формулою (3.14), маємо $2\cos^2 3\alpha - 1 = \cos 6\alpha$. Отже,

$$A = \cos 6\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Оскільки вираз у дужках — розгорнута формула (3.10) для косинуса різниці, то $A = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 6\alpha\right)$. ▲

Приклад 4. Перевірити, що $\operatorname{tg} 20° + 4 \sin 20° = \sqrt{3}$.

△ Застосувавши формули (3.2), (3.13) і (3.19), дістанемо

$$A = \operatorname{tg} 20° + 4\sin 20° = \frac{\sin 20° + 4\sin 20° \cos 20°}{\cos 20°} =$$

$$= \frac{\sin 20° + 2\sin 40°}{\cos 20°} = \frac{(\sin 20° + \sin 40°) + \sin 40°}{\cos 20°} =$$

$$= \frac{2\sin 30° \cos 10° + \sin 40°}{\cos 20°} = \frac{\cos 10° + \sin 40°}{\cos 20°}.$$

Замінивши за формулою зведення $\cos 10°$ на $\sin 80°$ і знову використавши формулу (3.19), знаходимо

$$A = \frac{\sin 80° + \sin 40°}{2} = \frac{2\sin 60° \cos 20°}{\cos 20°} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \ ▲$$

Приклад 5. Знайти значення $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, коли відомо, що $\sin x - \cos x = 1,4$.

△ Зручно скористатися формулами (3.28) і (3.29), враховуючи що вони правильні тільки при $x \neq \pi(2n + 1)$, $n \in Z$. Проте в даному випадку x не може приймати цих значень. Дійсно, коли б $x = \pi(2n + 1)$, то $\sin(\pi(2n + 1)) - \cos(\pi(2n + 1)) = 0 - (-1) \neq 1,4$. Виразивши $\sin x$ і $\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$, перепишемо дану рівність у вигляді

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1,4.$$

Покладаючи $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, дістанемо рівняння $z^2 - 5z + 6 = 0$, звідки $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Таким чином, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$ і $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. ▲

Приклад 6. Спростити вираз

$$A = \frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) + 2(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha).$$

△ За формулою зведення маємо $\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2 2\alpha$. Перетворимо $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha$ як суму кубів за формулою (2.13):

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = (\cos^2\alpha)^3 + (\sin^2\alpha)^3 =$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha),$$

звідки, враховуючи формули (3.1) і (3.13), знаходимо $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. Використавши одержані результати, перепишемо заданий вираз у вигляді

$$A = \frac{1}{2}\cos^2 2\alpha - 2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) +$$

$$+ 2\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

Після зведення подібних членів дістанемо $A = \frac{1}{2}\cos^2 2\alpha - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{1}{2}\cos 4\alpha$ (за тотожністю (3.14)). Таким чином, $A = \frac{1}{2}\cos 4\alpha$. ▲

Приклад 7. Спростити вираз

$$A = \frac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha + \cos 12\alpha},$$

знайти його значення, якщо $\operatorname{tg} 5\alpha = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

△ Перегрупуємо доданки в чисельнику і знаменнику дробу і скористаємося формулами (3.19) і (3.21). Тоді дістанемо

$$A = \frac{(\sin 8\alpha + \sin 12\alpha) + (\sin 9\alpha + \sin 11\alpha) + \sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha + \cos 12\alpha) + (\cos 9\alpha + \cos 11\alpha) + \cos 10\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 10\alpha\cos\alpha + \sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha + 2\cos 10\alpha\cos\alpha + \cos 10\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 10\alpha(2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1)}{\cos 10\alpha(2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1)} = \operatorname{tg} 10\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha}$$

(застосовано формулу (3.15)). Тепер праву частину заданої рівності $\operatorname{tg} 5\alpha = \cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ помножимо і розділимо на $\sin 20^\circ$; тричі застосовуючи формулу (3.13), знаходимо

$$\operatorname{tg} 5\alpha = \frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Отже,

$$A = \frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{16}{63}. \quad ▲$$

Приклад 8. Довести, що для будь-якого числа k доданків і будь-якого $\alpha \neq 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, справедливі рівності:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad (а)$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (б)$$

(ці формули зручно використовувати для перетворення суми косинусів або синусів при великій кількості доданків).

△ Нехай $S_k(\alpha) = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos k\alpha$. Помноживши обидві частини цієї рівності на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, дістанемо

$$2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha +$$
$$+ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha + \cdots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha.$$

Застосовуючи формулу (3.27), маємо

$$2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) +$$
$$+ \left(\sin\frac{7\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2}\right) + \cdots + \left(\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2} - \sin\frac{\alpha(2k-1)}{2}\right).$$

Помічаємо, що перший доданок у кожній дужці взаємно знищується з другим доданком в наступній дужці. Таким чином, права частина останньої рівності є різницею $\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$. Перетворивши її за формулою (3.20), дістанемо $2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$, звідки випливає рівність для $S_k(\alpha)$, тобто формула (а).

Аналогічно доводиться справедливість рівності (б). ▲

Зауваження. 1. Замість наведеного способу розв'язування можна застосувати метод математичної індукції.

2. Запам'ятовувати одержані формули немає необхідності, проте показаний тут спосіб перетворення тригонометричних виразів може бути ефективним при розв'язуванні аналогічних задач.

Група А

Довести тотожності (3.001—3.062):

3.001. $(1 + \cos^{-1}2\alpha + \operatorname{tg}2\alpha)(1 - \cos^{-1}2\alpha + \operatorname{tg}2\alpha) = 2\operatorname{tg}2\alpha.$

3.002. $\left(\cos^{-1}2\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi - \alpha\right) = 1.$

3.003. $\dfrac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right).$

3.004. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{tg}3\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}.$

3.005. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha =$
$= 4\cos(\alpha/2)\cos(5\alpha/2)\cos 4\alpha.$

3.006. $\sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha =$
$= 4\cos(\alpha/2)\cos\alpha\sin(21\alpha/2).$

3.007. $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha =$
$= -4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\cos(7\alpha/2).$

3.008. $\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha =$
$= -4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\sin(11\alpha/2).$

3.009. $\cos\alpha + \sin\alpha + \cos 3\alpha + \sin 3\alpha =$

$$= 2\sqrt{2}\cos\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right).$$

3.010. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

3.011. $(\sin\alpha)^{-1} + (\operatorname{tg}\alpha)^{-1} = \operatorname{ctg}(\alpha/2).$

3.012. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}{1 - \sin(3\alpha - \pi)} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5}{4}\pi + \dfrac{3}{2}\alpha\right).$

3.013. $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$

3.014. $2\sin^2(3\pi - 2\alpha)\cos^2(5\pi + 2\alpha) =$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi - 8\alpha\right).$$

3.015. $\sin 2\alpha(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha) + \dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} =$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

3.016. $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)\cos 4\alpha = 0.$

3.017. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2} - \cos^6\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin^2\alpha - 4}{4}\cos\alpha.$

3.018. $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) =$

$$= 4\cos 2\alpha \cos 4\alpha \sin 6\alpha.$$

3.019. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = \operatorname{tg}\alpha.$

3.020. $\dfrac{1 + \operatorname{ctg}\left(2\alpha - \dfrac{3}{2}\pi\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha.$

3.021. $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{14}{3}\pi\right) + \sin\left(\alpha - \dfrac{8}{3}\pi\right) = 0.$

3.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}.$

3.023. $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

3.024. $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}=1.$

3.025. $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right).$

3.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=$

$$=\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ).$$

3.027. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}.$

3.028. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

3.029. $2\left(\sin^{-1}4\alpha-\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.030. $\sin^2\left(\dfrac{15}{8}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{17}{8}\pi-2\alpha\right)=-\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

3.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$

$$=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

3.032. $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

3.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha.$

3.034. $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)=\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sqrt{2}}.$

3.035. $\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$

3.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}.$

3.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}.$

3.038. $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=1.$

3.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=-1.$

3.040. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2.$

3.041. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$

3.042. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-$

$$-\cos 75^\circ \sin(75^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha.$$

3.043. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.044. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha.$

3.045. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha}-\cos 8\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha=\sin 8\alpha.$

3.046. $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha.$

3.047. $\operatorname{ctg}(45^\circ+2\alpha)=\dfrac{\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}$.

3.048. $\dfrac{(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)(\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1)}{(\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1)(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=1.$

3.049. $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

3.050. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-$

$$-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha.$$

3.051. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

3.052. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3.053. $\sin\alpha\sin(x-\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\alpha\right)=\sin^2\dfrac{x}{2}$.

3.054. $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

3.055. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)-1=0.$

3.056. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

3.057. $\cos^4 x+\sin^2 y+\dfrac{1}{4}\sin^2 2x-1=$

$$=\sin(y+x)\sin(y-x).$$

3.058. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}-$

$$-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

3.059. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}+$

$+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$

3.060. $\operatorname{tg}4\alpha+\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}.$

3.061. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cos^{-2}\alpha.$

3.062. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$

Спростити вирази **(3.063—3.113)**:

3.063. $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}.$

3.064. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha.$

3.065. $\dfrac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}.$

3.066. $\dfrac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)}.$

3.067. $\cos\alpha\,(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha).$

3.068. $\sin^2\alpha\,(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha).$

3.069. $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}.$

3.070. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$

3.071. $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right).$

3.072. $\dfrac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.$

3.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1.$

3.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1.$

3.075. $(\cos\alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin 2\beta)^2$.

3.076. $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ + 2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha - \sin 4\alpha}$.

3.077. $\cos^2\left(\dfrac{3}{8}\pi - \dfrac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\dfrac{11}{8}\pi + \dfrac{\alpha}{4}\right)$.

3.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(135^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

3.079. $\dfrac{1+\operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$. 3.080. $\dfrac{\cos m\alpha - \cos n\alpha}{\sin n\alpha - \sin m\alpha}$.

3.081. $\sin^2\left(\alpha - \dfrac{3}{2}\pi\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.082. $1 - \dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

3.083. $\dfrac{\cos^{-1}\alpha + \cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta + \operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

3.084. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\dfrac{5}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi + \alpha\right)}$.

3.085. $1 - \dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

3.086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha}$.

3.087. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

3.088. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha - 180^\circ)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)}$.

3.089. $\dfrac{\cos^2(\alpha - 270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha + 90^\circ) - 1} + \dfrac{\sin^2(\alpha + 270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha - 90^\circ) - 1}$.

3.090. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2(\alpha - 90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha - 270^\circ) - 1)}{(1+\operatorname{ctg}^2(\alpha + 270^\circ))\cos^{-2}(\alpha + 90^\circ)}$.

3.091. $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

3.092. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha/2)-\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\alpha/2)}$.

3.093. $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

3.094. $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$.

3.095. $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.096. $\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}+\dfrac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-$

$-\dfrac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)}$.

3.097. $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha\,(4\sin\alpha+1)}$.

3.098. $\sin\left(2\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\dfrac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+2\alpha\right)$.

3.099. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}$.

3.100. $\sin^2\left(\dfrac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{17}{8}\pi-\alpha\right)$.

3.101. $\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\dfrac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^4\left(\dfrac{9}{4}\pi-2\alpha\right)\right)$.

3.102. $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{5}{4}\pi-2\alpha\right)}{\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}$.

3.103. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5}{4}\pi-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}$.

3.104. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}$.

3.105. $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$.

3.106. $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.107. $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}$.

3.108. $\dfrac{4\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.109. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.110. $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

3.111. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$.

3.112. $\dfrac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}$.

3.113. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Перетворити в добуток (3.114—3.147):

3.114. $\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1$.

3.115. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2$.

3.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha$.

3.117. $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3.118. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha+270^\circ)$.

3.119. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)$.

3.120. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$.

3.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)$.

3.123. $\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

3.124. $3-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$. **3.125.** $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

3.126. $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+$
$$+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right).$$

3.127. $1+\cos(2\alpha+270^\circ)+\sin(2\alpha+450^\circ)$.
3.128. $1-\cos(2\alpha-270^\circ)+\sin(2\alpha+270^\circ)$.

3.129. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-1$.

3.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)$.

3.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)$.

3.132. $\dfrac{\sin\alpha-2\cos3\alpha-\sin5\alpha}{\cos\alpha-2\sin3\alpha-\cos5\alpha}$.

3.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1$.

3.134. $\dfrac{\sin4\alpha+\sin5\alpha+\sin6\alpha}{\cos4\alpha+\cos5\alpha+\cos6\alpha}$.

3.135. $-\cos5\alpha\cos4\alpha-\cos4\alpha\cos3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.
3.136. $\sin10\alpha\sin8\alpha+\sin8\alpha\sin6\alpha-\sin4\alpha\sin2\alpha$.

3.137. $\dfrac{\cos7\alpha-\cos8\alpha-\cos9\alpha+\cos10\alpha}{\sin7\alpha-\sin8\alpha-\sin9\alpha+\sin10\alpha}$.

3.138. $\sin5\alpha-\sin6\alpha-\sin7\alpha+\sin8\alpha$.
3.139. $\cos3\alpha-\cos4\alpha-\cos5\alpha+\cos6\alpha$.

3.140. $\dfrac{\sin13\alpha+\sin14\alpha+\sin15\alpha+\sin16\alpha}{\cos13\alpha+\cos14\alpha+\cos15\alpha+\cos16\alpha}$.

3.141. $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$.
3.142. $\sin5\alpha+\sin6\alpha+\sin7\alpha+\sin8\alpha$.
3.143. $\cos5\alpha+\cos8\alpha+\cos9\alpha+\cos12\alpha$.
3.144. $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$.
3.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$, $0<\alpha<\pi/2$.
3.146. $1+\sin2\alpha-\cos2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.
3.147. $\sin2\alpha+\sin4\alpha-\sin6\alpha$.

Довести справедливість рівностей **(3.148—3.152)**:

3.148. $(\sin160^\circ+\sin40^\circ)(\sin140^\circ+\sin20^\circ)+$
$+(\sin50^\circ-\sin70^\circ)(\sin130^\circ-\sin110^\circ)=1$.

3.149. $(\cos34^\circ)^{-1}+(\operatorname{tg}56^\circ)^{-1}=\operatorname{ctg}28^\circ$.

3.150. $\dfrac{\cos28^\circ\cos56^\circ}{\sin2^\circ}+\dfrac{\cos2^\circ\cos4^\circ}{\sin28^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\sin38^\circ}{4\sin2^\circ\sin28^\circ}$.

3.151. $1 - 2\sin 50^\circ = 0{,}5\cos^{-1} 160^\circ$.

3.152. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) +$
$+ (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ - \cos 380^\circ) = 1$.

Обчислити (3.153—3.166):

3.153. $\sin^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) + \sin^2(5\pi/8) + \cos^2(7\pi/8)$.

3.154. $\operatorname{tg} 435^\circ + \operatorname{tg} 375^\circ$. 3.155. $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

3.156. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. 3.157. $\operatorname{ctg}\frac{13}{12}\pi - \operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi$.

3.158. $\sin\left(2\alpha + \frac{5}{4}\pi\right)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

3.159. $\cos\left(2\alpha + \frac{7}{4}\pi\right)$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$.

3.160. $\frac{5}{6 + 7\sin 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

3.161. $\frac{2}{3 + 4\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

3.162. $\sin\alpha$, якщо $\sin(\alpha/2) + \cos(\alpha/2) = 1{,}4$.

3.163. $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = p$.

3.164. $2 - 13\cos 2\alpha + \sin^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -1/5$.

3.165. $1 + 5\sin 2\alpha - 3\cos^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

3.166. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha\right) = \frac{9}{11}$.

3.167. Знайти число $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, коли відомо, що $\operatorname{tg} 2\alpha = -12/5$.

3.168. Довести, що коли A і B — гострі кути деякого прямокутного трикутника, то $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B$.

3.169. Знайти число β ($\pi/2 < \beta < \pi$), коли відомо, що $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 9/19$ і $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

3.170. Знайти $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, коли відомо, що $\sin\alpha - \cos\alpha = 1/2$.

3.171. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 3/4$, $\operatorname{ctg}\beta = 1/7$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Знайти $\alpha + \beta$.

3.172. Знайти $\operatorname{ctg} 2\alpha$, коли відомо, що $\sin(\alpha - 90^\circ) = -2/3$ і $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

3.173. Довести, що коли α і β задовольняють нерівності $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$ і $\cos\alpha = 7/\sqrt{50}$, $\operatorname{tg}\beta = 1/3$, то $\alpha + 2\beta = \pi/4$.

3.174. Знайти $\operatorname{tg} 2\alpha$, коли відомо, що $\cos(\alpha - 90^\circ) = 0{,}2$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3.175. Довести, що коли α і β задовольняють нерівності $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$ і $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{ctg}\beta = 2/3$, то $\alpha + \beta = 3\pi/4$.

3.176. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, $\operatorname{ctg}\beta = 5/3$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Знайти $\alpha + \beta$.

3.177. Обчислити $(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = 3\pi/4$.

3.178. Обчислити $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = \pi/4$.

3.179. Довести, що коли $\sin\alpha = \sqrt{21}/7$, $\sin\beta = \sqrt{21}/14$ і α, β — гострі кути, то $\alpha + \beta = 60^\circ$.

3.180. Показати, що вираз $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$ невід'ємний в області визначення.

3.181. Виключити α з рівностей $x = \operatorname{tg}^2 \alpha$, $y = \sin^2 \alpha$.

3.182. Довести, що $\cos 2 - \cos 8 < 0$.

3.183. Величини α, β, γ становлять арифметичну прогресію. Довести, що $\dfrac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\cos \gamma - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \beta$.

3.184. Дано дріб

$$\frac{5}{1 + \sqrt[3]{32 \cos^4 15^\circ - 10 - 8 \sqrt{3}}}.$$

Перетворити підкореневий вираз до більш простого вигляду, після чого дріб скоротити.

3.185. Виразити $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$ через m, де $m = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$.

Група Б

Довести тотожності (3.186—3.239):

3.186. $\dfrac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \dfrac{2}{3}$.

3.187. $4 \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$.

3.188. $\sin^{-1} 2\alpha \sin^{-1} (60^\circ - 2\alpha) \sin^{-1} (60^\circ + 2\alpha) =$
$= 4 \sin^{-1} 6\alpha$.

3.189. $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \dfrac{15}{2} \alpha$.

3.190. $$\frac{\sin^2 (3\pi - 4\alpha) + 4 \cos^2 \left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) - 4}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4 \cos^2 \left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

3.191. $$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2} \frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7}{2}\pi\right)\right)} = \frac{1}{8}.$$

3.192. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right) \cos^{-1} \alpha - 2 \cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin (4\pi + \alpha)) \cos^{-1} \alpha + 2 \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

3.193. $$\frac{2\cos\left(\frac{1}{6}\pi-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

3.194. $$\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.195. $$1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.196. $$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}=-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.197. $$\frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right).$$

3.198. $$\frac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

3.199. $$1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

3.200. $$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)\times\sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)=2.$$

3.201. $$\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

3.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$

3.203. $\dfrac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

3.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-1}(4\alpha-3\pi)=$

$$=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

3.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-$

$-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$

3.206. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$

3.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha.$

3.208. $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.209. $\dfrac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

3.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=8\sin^4 2\alpha.$

3.211. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$

3.212. $\dfrac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha}.$

3.213. $\dfrac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=$

$$=-1.$$

3.214. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

3.215. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\dfrac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.216. $\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+$

$+2\alpha)=\sin 6\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha\operatorname{tg} 6\alpha.$

3.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

3.218. $\dfrac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\frac{15}{2}\alpha.$

3.219. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

3.220. $$\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha.$$

3.221. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$

3.222. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha.$

3.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha.$

3.224. $\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha.$

3.225. $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha.$

3.226. $\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.$

3.227. $$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

3.228. $$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

3.229. $$\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1.$$

3.230. $$\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$$

3.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(5+3\cos 4\alpha)/8.$

3.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos 2\alpha\,(3+\cos 4\alpha)/4.$

3.233. $\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha.$

3.234. $$4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha.$$

3.235. $$\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1.$$

3.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha.$

3.237. $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}.$$

3.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+$

$+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=2\sin^2(5\alpha/2).$

3.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$

Спростити вирази (3.240—3.284):

3.240. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}.$

3.241. $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $90°<\alpha<135°.$

3.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

3.243. $(\cos 8\alpha\operatorname{tg}4\alpha-\sin 8\alpha)(\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha+\sin 8\alpha).$

3.244. $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta).$

3.245. $\frac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}.$

3.246. $\frac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}.$

3.247. $\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\times$

$\times\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

3.248. $\frac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{1+\cos 8x}+$

$+\frac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}.$

3.249. $\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}-1.$

3.250. $\frac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1.$

3.251. $\frac{\sin(80°+4\alpha)}{4\sin(20°+\alpha)\sin(70°-\alpha)}.$

3.252. $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$.

3.253. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}$.

3.254. $4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-$
$$-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right).$$

3.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha$.

3.256. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)+1}$.

3.257. $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.258. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-$
$$-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right).$$

3.259. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

3.260. $\dfrac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}$.

3.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.262. $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$.

3.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

3.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}$.

3.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+$
$$+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+$
$$+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right).$$

3.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}.$

3.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}.$

3.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}.$

3.270. $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}.$

3.271. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1)}.$

3.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha\neq\frac{\pi}{4}.$

3.273. $\cos^6\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-$
$$-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2.$$

3.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$

3.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}}$, якщо: а) $0<\alpha<\pi$; б) $\pi<\alpha<2\pi$.

3.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha).$

3.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-$
$$-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha).$$

3.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$,

якщо: а) $90^\circ<\alpha<180^\circ$; б) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

3.279. $\left(1+\cos\dfrac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}.$

3.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha + 4\sin^4 2\alpha - 4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4 - \sin^2 4\alpha - 4\sin^2 2\alpha}$.

3.281. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right) - \sin^6\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right) + \cos^6\left(\frac{7}{2}\pi - 2\alpha\right)$.

3.282. $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha} \times \dfrac{\cos 8\alpha - \cos 9\alpha - \cos 10\alpha + \cos 11\alpha}{\sin 8\alpha - \sin 9\alpha - \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}$.

3.283. $\cos(270^\circ - 2\alpha)\ \mathrm{ctg}(30^\circ - 2\alpha)\ \mathrm{tg}(240^\circ - 2\alpha)(2\cos 4\alpha - 1)$.

3.284. $\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Перетворити в добуток (3.285—3.331):

3.285. $\sin 6\alpha - 2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha + \sqrt{3}$.

3.286. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha + 1 - 2\cos^2 2\alpha$.

3.287. $3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8\cos^4 2\alpha$.

3.288. $\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 3$.

3.289. $\mathrm{tg}^4 x - 4\,\mathrm{tg}^2 x + 3$. **3.290.** $6\sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha$.

3.291. $\sqrt{1+\sin(\alpha/2)} - \sqrt{1-\sin(\alpha/2)}$, якщо $0^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.

3.292. $2\cos^2 2\alpha + 3\cos 4\alpha - 3$.

3.293. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

3.294. $\dfrac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos 4\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}$.

3.295. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$.

3.296. $\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta$.

3.297. $\sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2 2\alpha - \sin^2\beta$.

3.298. $2 + \mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi+\alpha}{4}\right)\left(1 + \cos\frac{\alpha-\pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2} - 2\pi\right) - 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right)$.

3.299. $2 - \dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}$. **3.300.** $2 - \mathrm{tg}\, 4\alpha - \mathrm{ctg}\, 4\alpha$.

3.301. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha - 1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)} - \mathrm{tg}\, 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$.

3.302. $\dfrac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$.

3.303. $1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha - \beta)$.

3.304. $1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$.

3.305. $4 \cos^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos (2\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right)$.

3.306. $\dfrac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}$, якщо:

а) $0° < \alpha < 90°$; б) $90° < \alpha < 180°$.

3.307. $2 \sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - \dfrac{4 \operatorname{tg} 2\alpha (1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}$.

3.308. $\cos^2 (\alpha - 2\beta) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2 (2\beta - \pi)$.

3.309. $1 - \cos (\pi - 8\alpha) - \cos (\pi + 4\alpha)$.

3.310. $\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$.

3.311. $\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

3.312. $2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1$.

3.313. $\dfrac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2 \sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(6\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.314. $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}$.

3.315. $\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$.

3.316. $\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right)$.

3.317. $\dfrac{\cos^{-1}\left(\alpha + \frac{5}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)}$.

3.318. $\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\,\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}$.

3.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha$.

3.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-$

$$-\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$$

3.321. $\cos^2\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi+\alpha\right)$.

3.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)$.

3.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270^\circ)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+$
$+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270^\circ)(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$.

3.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha$.

3.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha$.

3.326. $\cos^2(n\alpha/2)-\sin^2(m\alpha/2)$.

3.327. $1+\mathrm{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+2\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}$.

3.329. $\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)$.

3.330. $\sin\alpha-\left(\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2$.

3.331. $\mathrm{tg}\,210^\circ+\mathrm{ctg}\,210^\circ+\mathrm{tg}\,220^\circ+\mathrm{ctg}\,220^\circ$.

Довести справедливість рівностей (3.332—3.354):

3.332. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1$.

3.333. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=1$.

3.334. $\dfrac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ-\cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=-\mathrm{tg}\,24^\circ$.

3.335. $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ} = -1.$

3.336. $\dfrac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = 1.$

3.337. $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = 1/64.$

3.338. а) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.339. а) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$; б) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3.340. $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ.$

3.341. $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3.$

3.342. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1/16.$

3.343. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3/16.$

3.344. $\sin \dfrac{3\pi}{10} - \sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{2}.$

3.345. $\cos \dfrac{\pi}{5} + \cos \dfrac{2\pi}{5} + \cos \dfrac{4\pi}{5} + \cos \dfrac{6\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}.$

3.346. $\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ.$

3.347. $8 \cos \dfrac{4\pi}{9} \cos \dfrac{2\pi}{9} \cos \dfrac{\pi}{9} = 1.$

3.348. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 8.$

3.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = 1.$

3.350. $\cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos^2 35^\circ.$

3.351. $1 - \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) - \sin^2 \dfrac{3}{2}\alpha + \cos^2 \dfrac{3}{2}\alpha =$

$$= 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{2}\alpha \sin\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

3.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4 \sin(5\pi - 3\alpha) \cos(\alpha - 2\pi)} =$

$$= \cos 2\alpha.$$

3.353. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$

3.354. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ.$

Обчислити (3.355—3.367):

3.355. $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

3.356. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

3.357. $\cos (3\pi/5) \cos (6\pi/5)$.

3.358. $\frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$.

3.359. $\frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ}$.

3.360. $\frac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ - \cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg} 164^\circ$.

3.361. $\frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

3.362. $\frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha + 1}{8 \sin \alpha + 9 \cos \alpha - 1}$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$.

3.363. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right)$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3}{4}$.

3.364. $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ і $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, якщо $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$;

$\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$; $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$ і $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.365. $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, якщо $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} =$

$= \frac{7}{9}$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ і $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.366. $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = n$.

3.367. $\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Знаючи, що A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника, довести справедливість рівностей (3.368—3.374):

3.368. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

3.369. $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$.

3.370. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

3.371. $\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$.

3.372. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C =$

$$= -4 \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} C.$$

3.373. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

3.374. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$

3.375. Знайти $\operatorname{tg}(x/2)$, коли відомо, що $\sin x + \cos x = 1/5$.

3.376. Знаючи, що $\operatorname{tg}(\alpha/2) = m$, знайти $\dfrac{1 - 2\sin^2(\alpha/2)}{1 + \sin\alpha}$.

3.377. Знайти значення виразу $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}(\alpha/2) - \operatorname{tg}(\alpha/2)}$, коли відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

3.378. Відомо, що $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \dfrac{p}{q}$. Знайти $\operatorname{ctg}\beta$.

3.379. Знаючи, що $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, знайти $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

3.380. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = p/q$. Знайти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$.

3.381. Знайти $\cos 2\alpha$, коли відомо, що $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ і число α задовольняє нерівності: а) $3\pi/2 < \alpha < 7\pi/4$; б) $7\pi/4 < \alpha < 2\pi$.

3.382. Знайти $\sin 2\alpha$, коли відомо, що $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ і число α задовольняє нерівності: а) $\pi < \alpha < 5\pi/4$; б) $5\pi/4 < \alpha < 3\pi/2$.

3.383. Відомо, що $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{p}{q}$. Знайти $\operatorname{tg}\beta$.

3.384. Довести, що вираз

$$\frac{1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)}$$

не залежить від α, де $\alpha \neq \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{12}$.

3.385. Довести рівність $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \times \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

3.386. Довести, що вираз $\operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$ не залежить від α, якщо $\alpha \neq \frac{\pi(4n + 3)}{8}$.

3.387. Довести, що вираз

$$\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$$

не залежить від α, якщо $\alpha \neq \pi n/2$.

3.388. Довести, що вираз $\sin(250^\circ+\alpha)\cos(200^\circ-\alpha)-\cos 240^\circ \cos(220^\circ-2\alpha)$ не залежить від α.

3.389. Довести, що вираз $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ не залежить ні від α, ні від φ.

3.390. Вивести формулу $\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha-\cos(n-1)\alpha$, де n — довільне дійсне число, і за її допомогою подати $\cos 3\alpha$ і $\cos 4\alpha$ у вигляді многочленів від $\cos\alpha$.

3.391. Довести, що

$$4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos(3\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

3.392. Дано, що $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq 2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Знайти $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)$.

3.393. Показати, що коли p стале, то функція $f(\alpha)=\frac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ також є сталою.

3.394. Дано функцію $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$. Знайти $f(\alpha)$, коли відомо, що $\sin 2\alpha = 2/3$.

3.395. Довести, що коли $\alpha+\beta=60^\circ$ $(\alpha>0, \beta>0)$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leqslant 1/3$.

Група В

Довести тотожності (3.396—3.409):

3.396. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$

3.397. $\operatorname{ctg}(270^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150^\circ-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha.$

3.398. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}.$

3.399. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin(7\alpha/2)\sin(\alpha/2).$

3.400. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}.$

3.401. $\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos^3 4\alpha.$

3.402. $8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 =$
$= 2\cos(7\alpha/2)\cos(\alpha/2).$

3.403. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta).$

3.404. $$\frac{8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1}{8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1} = -\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3.405. $$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3.406. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha - \ldots - 2^n\operatorname{tg}2^n\alpha = 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha,$

n — будь-яке натуральне ціле або нуль.

3.407. $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha = \dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha},$

n — число доданків.

3.408. $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha = \dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha} + \dfrac{n}{2},$ n — число доданків.

3.409. $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cdots + \sin^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}.$

Спростити вирази (3.410—3.412):

3.410. $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha\sin 6\alpha.$

3.411. $3\sin\alpha\cos 3\alpha + 9\sin\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha\cos 3\alpha - 3\sin 3\alpha\cos\alpha.$

3.412. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1.$

Перетворити в добуток (3.413—3.415):

3.413. $\sin^3\alpha\cos 3\alpha + \cos^3\alpha\sin 3\alpha.$

3.414. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos^{-2}\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin^{-2}\alpha - 1}\right) + \operatorname{ctg}2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha.$

3.415. $\cos 22\alpha + 3\cos 18\alpha + 3\cos 14\alpha + \cos 10\alpha.$

Довести справедливість рівностей (3.416—3.440):

3.416. $\cos\dfrac{\pi}{33}\cos\dfrac{2\pi}{33}\cos\dfrac{4\pi}{33}\cos\dfrac{8\pi}{33}\cos\dfrac{16\pi}{33} = \dfrac{1}{32}.$

3.417. $$3\sin\frac{2\pi}{17} + \sin\frac{4\pi}{17} - \sin\frac{6\pi}{17} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17} = 8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}.$$

3.418. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}$.

3.419. $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ=$
$=48$.

3.420. $\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\times$
$\times\sin 80^\circ=3/256$.

3.421. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=$
$=-1/2^{14}$.

3.422. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\times$
$\times\cos\frac{7\pi}{15}=1/2^7$.

3.423. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=$
$=0{,}5\sin 25^\circ\sin^{-1}5^\circ$.

3.424. $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}80^\circ=1$.

3.425. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ=\sqrt{3}$.

3.426. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ=\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$.

3.427. $\cos 50^\circ+8\cos 200^\circ\cos 220^\circ\cos 80^\circ=2\sin^2 65^\circ$.

3.428. $\sin 18^\circ\sin 54^\circ=1/4$.

3.429. $\sin^2(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}(-1/2))=1/2$.

3.430. $\sin^2(\operatorname{arcctg}(1/2)-\operatorname{arcctg}(-1/3))=1/2$.

3.431. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

3.432. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{1}{5}$.

3.433. $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=9/25$.

3.434. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

3.435. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}=\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3.436. $\cos(2\operatorname{arcctg}7)=\sin(4\operatorname{arcctg}3)$.

3.437. $\cos(11\pi/5)-\cos(2\pi/5)=1/2$.

3.438. $\sin 84^\circ\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 12^\circ=1/16$.

3.439. $\operatorname{tg}830^\circ+\operatorname{tg}770^\circ+\operatorname{tg}740^\circ=\operatorname{tg}470^\circ\operatorname{tg}410^\circ\operatorname{tg}380^\circ$.

3.440. $\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}54^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}12^\circ=1$.

Обчислити **(3.441—3.462):**

3.441. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)$.

3.442. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$.

3.443. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

3.444. $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

3.445. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

3.446. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

3.447. $\arccos(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

3.448. $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

3.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, де $a<0$.

3.450. $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

3.451. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

3.452. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

3.453. $\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

3.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

3.455. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

3.456. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.457. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.458. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-3\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

3.459. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.460. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.461. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

3.462. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.463. Знайти $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, коли відомо, що $\sin x - \cos x = \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

3.464. Довести, що коли $\sin\alpha = 1/3$, $\sin\beta = 1/(3\sqrt{11})$, $\sin\gamma = 3/\sqrt{11}$ (α, β, γ — гострі додатні кути), то $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$.

3.465. Знаючи, що $\operatorname{tg}\alpha = m$, знайти

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right).$$

3.466. Відомо, що $\cos 2\alpha = m$. Знайти $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

3.467. Знайти $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$, коли відомо, що $\cos 2\alpha = m$.

3.468. Знайти значення виразу $\frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2\sin^2 4\alpha}$, коли відомо, що $\sin\alpha - \cos\alpha = m$.

3.469. Знаючи, що $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$ і що $0 < x < \frac{\pi}{2}$, знайти $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

3.470. Нехай A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника. Довести, що $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2$.

3.471. Довести, що коли $\cos 2\alpha = \cos 2\beta\cos 2\gamma$, то $1 + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \sin^{-2}\gamma$.

3.472. Нехай A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника. Довести, що

$$\sin(2n+1)A + \sin(2n+1)B + \sin(2n+1)C =$$
$$= (-1)^n\cdot 4\cos\frac{(2n+1)A}{2}\cos\frac{(2n+1)B}{2}\cos\frac{(2n+1)C}{2},$$

де n — ціле число.

3.473. Нехай A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника. Довести, що $\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n+1}\cdot 4\sin nA\ \sin nB \times \sin nC$, де n — ціле число.

3.474. Довести, що рівність $(\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x = 1$ виконується для всіх $\varphi \in (0;\ \pi/2)$ в тому і тільки в тому випадку, коли $x = 2$.

3.475. Довести, що вираз $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) + 2\sin^2(\alpha-\varphi) - \cos 2\varphi$ не залежить від φ.

3.476. Знайти найбільше значення виразу $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - 4\alpha\right)$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/8$.

3.477. Знайти найбільше значення виразу $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1+\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)}$ при $0 < \alpha < \pi/8$.

3.478. Довести таке твердження: для того щоб один із кутів трикутника ABC дорівнював 60°, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$.

3.479. Довести таке твердження: для того щоб один із кутів трикутника ABC дорівнював 36° або 108°, достатньо, щоб виконувалась рівність $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$.

3.480. Довести таке твердження: для того щоб один із кутів трикутника ABC дорівнював 36° або 108°, необхідно, щоб виконувалась рівність $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$.

3.481. Знайти найменше значення виразу $\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$ при $0 < \alpha < \pi/4$.

3.482. Знайти найбільше значення виразу $\frac{\cos 2\alpha + 1}{\operatorname{ctg}(\alpha/2) - \operatorname{tg}(\alpha/2)}$ при $0 < \alpha < \pi/2$.

3.483. Довести, що коли $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$, то $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ і $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$.

3.484. Знаючи, що $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{3}$ і $0 < x < \pi/2$, знайти $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

3.485. Знайти найбільше значення виразу $\frac{1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.486. Знайти найбільше значення виразу $\frac{1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.487. Знаючи, що $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, знайти $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}$.

3.488. Довести, що коли для деяких чисел α, β і γ виконується рівність $(1 - \sin\alpha)(1 - \sin\beta)(1 - \sin\gamma) = (1 + \sin\alpha)(1 + \sin\beta)(1 + \sin\gamma)$, то тоді кожна з частин цієї рівності дорівнює $|\cos\alpha\cos\beta \times \cos\gamma|$.

3.489. Довести, що для чисел φ, які задовольняють нерівності $0 < \varphi < \pi/4$, виконується рівність

$$1 - \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi + \dots = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin(\pi/4 - \varphi)}.$$

3.490. Знайти найменше значення виразу $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.491. Знайти найменше значення виразу $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

3.492. Показати, що коли α стале, то функція $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x)$ також є сталою.

3.493. Знайти суму $1 + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha + \dots + \cos 4n\alpha$.

3.494. Показати, що коли $x = \operatorname{tg} 5^\circ$, $y = \operatorname{tg} 20^\circ$ і $z = \operatorname{tg} 65^\circ$, то $xy + yz + zx = 1$

3.495. Довести, що $\operatorname{tg} 142^\circ 30' + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ є цілим числом.

3.496. Нехай A, B, C — кути трикутника. Довести, що $8\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) \leqslant 1$.

3.497. Показати, що коли $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi$, то $x + y + z = xyz$.

3.498. Показати, що коли $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi/2$, то $xy + yz + zx = 1$.

3.499. Нехай A, B, C — кути трикутника. Довести, що $8\cos A \times \cos B\cos C \leqslant 1$.

3.500. Нехай A, B, C — кути трикутника. Використовуючи нерівність $\cos A\cos B\cos C \leqslant 1/8$, довести, що $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant 9/4$.

частину слів цього речення, але не змінюючи порядку їхнього слідування?

5.090. У шаховій зустрічі беруть участь дві команди, по 8 чоловік у кожній. Кожний з учасників і колір його фігур визначаються жеребкуванням. Яке число різних результатів жеребкування?

Глава 6

АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ

Вказівки до розв'язування рівнянь з однією змінною

1⁰. *Рівнянням з однією змінною* називається рівність, що містить цю змінну (її інколи називають невідомим).

Значення змінної, при підстановці якого в рівняння дістаємо правильну рівність, називається *коренем* (або *розв'язком*) рівняння.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх не існує.

2⁰. Рівняння, що мають одні й ті самі корені, називають *рівносильними*. У процесі розв'язування задане рівняння замінюють більш простим; при цьому використовують такі правила перетворення рівняння у рівносильне йому:

а) будь-який доданок можна перенести з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком;

б) обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число;

в) рівняння вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ можна замінити рівносильною системою $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ або розв'язати рівняння $f(x) = 0$, а потім відкинути ті із знайдених коренів, які перетворюють в нуль знаменник $g(x)$.

3⁰. Нехай у результаті перетворення рівняння

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{6.1}$$

здобуто рівняння

$$f_2(x) = g_2(x). \tag{6.2}$$

Якщо кожний корінь рівняння (6.1) є коренем рівняння (6.2), то рівняння (6.2) називають *наслідком* рівняння (6.1).

Корені рівняння (6.2), що не задовольняють рівняння (6.1), називаються *сторонніми* коренями рівняння (6.1) і не вважаються розв'язками цього рівняння.

До появи сторонніх коренів можуть, наприклад, привести (але не обов'язково приводять) такі перетворення: піднесення до квадрата (або другого парного степеня) обох частин рівняння, множення обох частин рівняння на алгебраїчний вираз, що містить зміну, і т. п.

4⁰. Щоб вияснити, чи існують серед коренів рівняння-наслідку сторонні корені початкового рівняння, необхідно перевірити кожний із знайдених коренів підстановкою його у початкове рівняння.

Можна зробити інакше: на кожному етапі розв'язування рівняння визначати проміжки, в яких можуть знаходитися корені рівняння. Всі корені, що не належать цим проміжкам, є сторонніми і повинні бути відкинуті. Одначе решту коренів все одно треба перевірити підстановкою у початкове рівняння.

5^0. Якщо рівняння має вигляд $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, то ділення обох його частин на $h(x)$, як правило, недопустиме, оскільки може привести до втрати коренів; у цьому випадку можуть бути втрачені корені рівняння $h(x) = 0$, якщо вони існують.

Рівняння не вважається розв'язаним як у випадку, коли відповідь містить сторонні корені, так і в випадку, коли в процесі розв'язування було втрачено хоча б один корінь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x(3-x)}$.

△ Перенесемо всі члени рівняння у ліву частину і перетворимо одержаний вираз до вигляду $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x(3-x)} = 0$. Із рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$ знаходимо $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. При $x = 3$ знаменник перетворюється в нуль: отже, 3 не є коренем. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 4$. ▲

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} = x - 4$.

△ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(\sqrt{x-2})^2 = (x-4)^2, \quad x - 2 = x^2 - 8x + 16,$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 6.$$

Перевіримо знайдені корені, підставляючи їх у початкове рівняння. Якщо $x = 3$, дістаємо $1 = -1$ — неправильна рівність; якщо $x = 6$, то дістаємо $2 = 2$ — правильна рівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 6$.

Зазначимо, що можна було спочатку знайти область визначення заданого рівняння. Для цього розв'яжемо систему нерівностей $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x - 4 \geqslant 0, \end{cases}$ звідки $x \geqslant 4$. Тоді бачимо, що $x_1 = 3$ — сторонній корінь початкового рівняння. Перевіркою переконуємось, що $x = 6$ задовольняє задане рівняння. Отже, $x = 6$. ▲

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x+1)^2 - 8x}$.

△ Перетворюючи праву частину рівняння, дістаємо

$$\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1},$$

$$\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x-1)^2}, \quad \sqrt{1-4x} + 2 = |2x - 1|.$$

Це рівняння має розв'язок за умови $1 - 4x \geqslant 0$, тобто $x \leqslant 1/4$. Тоді $|2x - 1| = 1 - 2x$ (а не $2x - 1$, оскільки це виконується тільки при $x \geqslant 1/2$, що суперечить умові $x \leqslant 1/4$). Отже, $\sqrt{1-4x} + 2 = 1 - 2x$, звідки

$$\sqrt{1-4x} = -1 - 2x. \qquad (*)$$

Область можливих значень x визначається системою нерівностей $\begin{cases} 1 - 4x \geqslant 0, \\ -1 - 2x \geqslant 0, \end{cases}$ тобто $x \leqslant -1/2$. Піднісши обидві частини рівняння (*) до квадрата, дістаємо

$$1 - 4x = 1 + 4x + 4x^2, \quad 4x^2 + 8x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2.$$

Корінь $x_1 = 0$ не задовольняє умову $x \leqslant -1/2$ і тому є стороннім, але його треба перевірити. Підставляючи $x = -2$ у початкове рівняння, дістаємо правильну рівність: $3 + 2 = 5$. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = -2$. ▲

При розв'язуванні рівнянь часто використовуються метод розкладу на множники і метод заміни змінної.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x+1)(x^2+2)+(x+2)\times\times(x^2+1)=2$.

$\triangle$ Розкриваючи дужки і зводячи подібні члени, маємо $2x^3+3x^2++3x+2=0$. Розкладемо ліву частину рівняння на множники. Спочатку згрупуємо члени рівняння, а потім використаємо формулу (2.13), дістанемо

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0,\quad 2(x+1)(x^2-x+1)+$$
$$+3x(x+1)=0,\quad (x+1)(2x^2+x+2)=0.$$

Остання рівність правильна при умові, що принаймні один із співмножників дорівнює нулю: $x+1=0$, звідки $x=-1$ або $2x^2+x++2=0$. Проте дискримінант останнього рівняння від'ємний, отже, воно не має коренів. Таким чином, $x=-1$. ▲

Приклад 5. Розв'язати рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

$\triangle$ Введемо змінну z, покладаючи $x+\frac{1}{x}=z$. Тоді $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2==z^2$, звідки за формулою (2.9) знаходимо $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$. Замінивши у даному рівнянні вираз у перших дужках на z, а в других — на z^2-2, дістанемо

$$7z-2(z^2-2)=9,\quad 2z^2-7z+5=0,\quad z_1=5/2,\quad z_2=1.$$

Для відшукання x треба розв'язати два квадратні рівняння:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\quad 2x^2-5x+2=0,\quad x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{1}{x}=1,\quad x^2-x+1=0,\quad D<0 \text{ — коренів не існує.}$$

Отже, дістаємо відповідь: $x_1=2$, $x_2=1/2$. ▲

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}==\sqrt{3x+12}$.

$\triangle$ Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо

$$x+1+4x+13+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}=3x+12,$$
$$\sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1).$$

Ще одне піднесення до квадрата привело б до знищення ірраціональності, проте тут не має необхідності в цьому перетворенні. Зазначимо, що одержане рівняння-наслідок може мати розв'язок при умові $x+1\leqslant 0$. Разом з тим однією з умов існування розв'язку початкового рівняння є вимога $x+1\geqslant 0$. Обидві умови сумісні в єдиному випадку, якщо $x+1=0$, звідки $x=-1$. Це значення x, як легко перевірити, задовольняє початкове рівняння. Оскільки рівняння-наслідок інших коренів не має, то інших коренів не має і початкове рівняння. Таким чином, $x=-1$. ▲

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}==5\sqrt[3]{25-x^2}$.

△ Оскільки $x = 5$ не є коренем рівняння, то обидві частини рівняння можна розділити на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$, причому втрати коренів не буде. Дістаємо рівняння, рівносильне початковому:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Покладаючи $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = z$, приходимо до квадратного рівняння $z^2 - 5z + 4 = 0$, звідки $z_1 = 1$, $z_2 = 4$. Для відшукання x маємо два рівняння: $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = 1$ і $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = 4$. Піднісши до куба обидві частини кожного з них, дістаємо $\frac{5+x}{5-x} = 1$, звідки $x = 0$, і $\frac{5+x}{5-x} = 64$, звідки $x = 63/13$. Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = 63/13$. ▲

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 3.$$

△ Запишемо рівняння в такому вигляді:

$$(2x^2 - 3x + 2) - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 1 = 0.$$

Покладемо $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = z$; зазначимо, що придатними можуть бути тільки значення $z \geqslant 0$. Виконуючи вказану заміну, дістаємо рівняння $z^2 - 2z + 1 = 0$, звідки $z = 1$ — придатне значення z, і тому рівняння $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1$ або $2x^2 - 3x + 1 = 0$ рівносильне заданому. Корені $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ цього квадратного рівняння є коренями початкового рівняння. ▲

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

△ Покладемо $\sqrt{x-1} = z$ і зазначимо, що $z \geqslant 0$, $x \geqslant 1$, $x = z^2 + 1$. Тоді, згідно з формулою (2.23), дістаємо

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = \sqrt{z^2 - 4z + 4} = |z - 2|,$$

$$\sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = \sqrt{z^2 - 6z + 9} = |z - 3|.$$

Початкове рівняння набирає вигляду

$$|z - 2| + |z - 3| = 1. \qquad (*)$$

Використовуючи означення модуля, розглянемо такі випадки:

1) якщо $z < 2$, то $2 - z + 3 - z = 1$, звідки $z = 2$;

2) якщо $2 \leqslant z < 3$, то $z - 2 + 3 - z = 1$, звідки $1 = 1$, тобто всі значення z, що належать проміжку $[2; 3)$, задовольняють рівняння;

3) якщо $z \geqslant 3$, то $z - 2 + z - 3 = 1$, звідки $z = 3$.

Об'єднуючи ці розв'язки, зазначаємо, що рівняння (*) задовольняють всі значення z, для яких $2 \leqslant z \leqslant 3$.

Оскільки $z = \sqrt{x-1}$, то $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$, отже, $4 \leqslant x - 1 \leqslant 9$, звідки $5 \leqslant x \leqslant 10$. ▲

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

△ Цю систему лінійних рівнянь можна розв'язувати методом послідовного виключення (методом Гаусса), проте простіше діяти так: додаючи рівняння, дістаємо $4(x + y + z) = 24$, звідки $x + y + z = 6$. Послідовно віднімаючи це рівняння від кожного рівняння системи, знаходимо $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ▲

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

△ Піднесемо до квадрата обидві частини першого рівняння:

$$x^2y + y^2x + 2xy\sqrt{xy} = 36.$$

Віднімаючи від цього рівняння друге рівняння системи, дістаємо $xy\sqrt{xy} = 8$ або $(xy)^3 = 64$, тобто $xy = 4$. Це рівняння і друге рівняння заданої системи утворюють систему

$$\begin{cases} xy = 4, \\ xy(x + y) = 20 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Звідси знаходимо дві пари розв'язків: $x_1 = 4$, $y_1 = 1$ і $x_2 = 1$, $y_2 = 4$. Перевіркою переконуємося, що обидві пари задовольняють початкову систему рівнянь. ▲

Величини a, b, c, p, q, m, n, як правило, вважаються сталими, а величини x, y, z, u, v, w — змінними.

Група А

Розв'язати рівняння **(6.001—6.066)**:

6.001. $\frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23.$ **6.002.** $\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2.$

6.003. $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$ $\left(\text{підстановка } \frac{x^2+x-5}{x} = z\right)$.

6.004. $x^4 - \frac{50}{2x^4-7} = 14$ (підстановка $2x^4 - 7 = z$).

6.005. $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$ (підстановка $x^2 + 2x = z$).

6.006. $x + \frac{1}{x} = 2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$. **6.007.** $\frac{x^2}{a^3} + \frac{b^3}{x^2} = \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^4}$.

6.008. $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$.

6.009. $\frac{5a}{y+a}+\frac{4a}{y+2a}+\frac{3a}{y+3a}=8.$

6.010. $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}.$

6.011. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}.$

6.012. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2.$

6.013. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

6.014. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2.$

6.015. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2.$

6.016. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ $\left(\text{підстановка } \frac{x^2+1}{x}=u\right).$

6.017. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}.$

6.018. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ (підстановка $x+x^{-1}=z$).

6.019. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$ (підстановка x^2-4x+
$+10=y$).

6.020. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5.$

6.021. $8x^4+x^3+64x+8=0.$

6.022. $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

6.023. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6.$

6.024. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

6.025. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

6.026. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2.$ 6.027. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}.$

6.028. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1.$

6.029. $\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a-x}{a}=1.$

6.030. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2.$

6.031. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

6.032. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

6.033. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

6.034. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

6.035. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b \qquad (a>b)$.

6.036. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

6.037. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

6.038. $2\sqrt{7-x}:0{,}6\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1{,}5}:\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}$.

6.039. $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{1/2}+4\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{1/2}=4$.

6.040. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

6.041. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

6.042. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

6.043. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.

6.044. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6$.

6.045. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$.

6.046. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

6.047. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

6.048. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

6.049. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

6.050. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

6.051. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

6.052. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.

6.053. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

6.054. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

6.055. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

6.056. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

6.057. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

6.058. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$

(підстановка $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=z$).

6.059. $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=2{,}5$.

6.060. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

6.061. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$.

6.062. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$.

6.063. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

6.064. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

6.065. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$.

6.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

(підстановка $x^2-4x-6=u$).

Розв'язати системи рівнянь **(6.067—6.119):**

6.067. $\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ x+y=0{,}9.\end{cases}$ **6.068.** $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^3y^3=-8.\end{cases}$

6.069. $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\ x^{-2}+y^{-2}=13.\end{cases}$ **6.070.** $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$

6.071. $\begin{cases}x-y=1,\\ x^3-y^3=7.\end{cases}$ **6.072.** $\begin{cases}\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x},\\ y^2-x-5=0.\end{cases}$

6.073. $\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28.\end{cases}$ **6.074.** $\begin{cases}x+y+\frac{x}{y}=9,\\ \frac{(x+y)x}{y}=20.\end{cases}$

6.075. $\begin{cases}x^2y+xy^2=6,\\ xy+x+y=5.\end{cases}$ **6.076.** $\begin{cases}x^2y^3+x^3y^2=12,\\ x^2y^3-x^3y^2=4.\end{cases}$

6.077. $\begin{cases}x^4+y^4=82,\\ xy=3.\end{cases}$ **6.078.** $\begin{cases}x^3+y^3=35,\\ x+y=5.\end{cases}$

6.079. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2. \end{cases}$ 6.080. $\begin{cases} u^2+uv=15, \\ v^2+uv=10. \end{cases}$

6.081. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$ 6.082. $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2. \end{cases}$

6.083. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y, \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y. \end{cases}$

6.084. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ 6.085. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

6.086. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.087. $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6. \end{cases}$ 6.088. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

6.089. $\begin{cases} u^3+v^3+1=m, \\ u^3v^3=-m. \end{cases}$ 6.090. $\begin{cases} ax+\dfrac{b}{y}=2, \\ \dfrac{b}{x}+ay=2ab. \end{cases}$

6.091. $\begin{cases} (x-y)xy=30, \\ (x+y)xy=120. \end{cases}$ 6.092. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

6.093. $\begin{cases} v-u=1, \\ w-v=1, \\ (u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3. \end{cases}$

6.094. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6}, \\ xy=5. \end{cases}$

6.095. $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$ 6.096. $\begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2. \end{cases}$

6.097. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

6.098. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$ 6.099. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91, \\ x+\sqrt{xy}+y=13. \end{cases}$

6.100. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8. \end{cases}$

6.101. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8 \end{cases}$

(покласти $\sqrt{x+y}=u, \quad \sqrt[3]{x-y}=v$).

6.102. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$

6.103. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4 \end{cases}$

$\left(\text{покласти } \sqrt{\dfrac{x}{y}}=z\right)$.

6.104. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\sqrt{x}=12, \\ xy=64. \end{cases}$

6.105. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$ **6.106.** $\begin{cases} u^2+v^2=uv+13, \\ u+v=\sqrt{uv}+3. \end{cases}$

6.107. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ xy=9. \end{cases}$

6.108. $\begin{cases} 3(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5, \\ 4(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3. \end{cases}$

6.109. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$ **6.110.** $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$

6.111. $\begin{cases} 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$ **6.112.** $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

6.113. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2, \\ x+y=xy+a. \end{cases}$

6.114. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$ **6.115.** $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

6.116. $\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5. \end{cases}$ **6.117.** $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

6.119. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0{,}5\sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

6.120. Не розв'язуючи рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, знайти $x_1^{-2} + x_2^{-2}$, де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.

6.121. Скласти квадратне рівняння з коренями $1/x_1$ і $1/x_2$, якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

6.122. Скласти рівняння другого степеня, один із коренів якого дорівнював би сумі, а другий — добутку коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

6.123. Скласти рівняння другого степеня, корені якого були б на одиницю більші за корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

6.124. Визначити коефіцієнти квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ так, щоб його корені дорівнювали p і q.

6.125. Знайти коефіцієнти A і B рівняння $x^2 + Ax + B = 0$, коли відомо, що числа A і B є також його коренями.

6.126. При якому цілому значенні k один із коренів рівняння $4x^2 - (3k + 2)x + (k^2 - 1) = 0$ втроє менший за інший?

6.127. При якому цілому значенні p рівняння $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ і $x^2 - 2px + 5 = 0$ мають спільний корінь? Знайти цей корінь.

6.128. Знайти всі значення a, при яких сума коренів рівняння $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ дорівнює сумі квадратів коренів.

6.129. При якому значенні a рівняння $x^2 + ax + 8 = 0$ і $x^2 + x + a = 0$ мають спільний корінь?

6.130. Із рівняння $x^2 - 2x + c = 0$ визначити ті значення c, при яких його корені x_1 і x_2 задовольняють умову $7x_2 - 4x_1 = 47$.

6.131. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$, знайти, при якому значенні a один із коренів у два рази більший за інший.

6.132. При якому значенні p відношення коренів рівняння $x^2 + px - 16 = 0$ дорівнює -4?

6.133. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 5x - 2 = 0$, знайти суму кубів його коренів.

6.134. При якому цілому значенні b рівняння $2x^2 + (3b - 1)x - 3 = 0$ і $6x^2 - (2b - 3)x - 1 = 0$ мають спільний корінь?

6.135. При якому додатному значенні c один корінь рівняння $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ дорівнює квадрату іншого?

Група Б

Розв'язати рівняння (6.136—6.182):

6.136. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} + \dfrac{x^2 + 2}{x - 2} = -2.$

6.137. $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x + 1}{x + 2} + \dfrac{x + 2}{x} = \dfrac{25}{6}.$

6.138. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81.$

6.139. $(x + 1)^5 + (x - 1)^5 = 32x.$

6.140. $\dfrac{z^2 - z}{z^2 - z + 1} - \dfrac{z^2 - z + 2}{z^2 - z - 2} = 1.$

6.141. $\dfrac{24}{x^2 + 2x - 8} - \dfrac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2.$

6.142. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$.

6.143. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$.

6.144. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

6.145. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12$.

6.146. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1$.

6.147. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

6.148. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

6.149. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$.

6.150. $\frac{u^2}{2-u^2}+\frac{u}{2-u}=2$.

6.151. $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x+m}{x+1}=\frac{x-2m}{x-2}+\frac{x+2m}{x+2}-\frac{6(m-1)}{5}$.

6.152. $\frac{z+4}{z-1}+\frac{z-4}{z+1}=\frac{z+8}{z-2}+\frac{z-8}{z+2}+6$.

6.153. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5$.

6.154. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$.

6.155. $ax^4-x^3+a^2x-a=0$.

6.156. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

6.157. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0$.

6.158. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

6.159. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.

6.160. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

6.161. $(x-1)x(x+1)+x(x+1)(x+2)=$
$$=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$$

6.162. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8}\qquad(a\neq 0)$.

6.163. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0$.

6.164. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

6.165. $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\dfrac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\dfrac{13}{6}.$

6.166. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

6.167. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

6.168. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

6.169. $\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{x+2}=2.$

6.170. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

6.171. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

6.172. $(x+\sqrt{x^2-1})^5(x-\sqrt{x^2-1})^3=1.$

6.173. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=$

$$=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$$

6.174. $\dfrac{z}{z+1}-2\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}=3.$

6.175. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

6.176. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2.$

6.177. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

6.178. $\dfrac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\dfrac{7}{3}.$

6.179. $|x|+|x-1|=1.$

6.180. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\dots+$

$$+(x^2+20x+39)=4500.$$

6.181. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$

6.182. $|x|^3+|x-1|^3=9.$

Розв'язати системи рівнянь **(6.183—6.243):**

6.183. $\begin{cases} xy(x+1)(y+1)=72, \\ (x-1)(y-1)=2. \end{cases}$

6.184. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

6.185. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

6.186. $\begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=k^3, \end{cases}$

$a\neq b,\quad b\neq c,\quad c\neq a.$

6.187. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10, \\ (x+y)(xy+1)=25. \end{cases}$

6.188. $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3, \\ x-by+b^2z=b^3, \\ x-cy+c^2z=c^3, \end{cases}$

$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a.$

6.189. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$ **6.190.** $\begin{cases} xy=a, \\ yz=b, \quad abc>0. \\ zx=c, \end{cases}$

6.191. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x, \\ y^2+x=6. \end{cases}$ **6.192.** $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$

6.193. $\begin{cases} x+yz=2, \\ y+zx=2, \\ z+xy=2. \end{cases}$

6.194. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

6.195. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0. \end{cases}$

6.196. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$ **6.197.** $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

6.198. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b}, \\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}. \end{cases}$

6.199. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z+19=0. \end{cases}$

6.200. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

6.201. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0. \end{cases}$

6.202. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3, \\ \dfrac{1}{xyz}=1. \end{cases}$

6.203. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2, \\ a \neq b \neq c. \end{cases}$

6.204. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ \dfrac{(x+y)\,x^2}{y^2}=12. \end{cases}$ 6.205. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$

6.206. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

6.207. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x\,(y+z)=5, \\ y\,(x+z)=8. \end{cases}$

6.208. $\begin{cases} (x-y)\,(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)\,(x^2+y^2)=15a^3, \end{cases} \quad a \neq 0.$

6.209. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ x^2y+xy^2=-6. \end{cases}$

6.210. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$ 6.211. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

6.212. $\begin{cases} \dfrac{3}{uv}+\dfrac{15}{vw}=2, \\ \dfrac{15}{vw}+\dfrac{5}{wu}=2, \\ \dfrac{5}{wu}+\dfrac{3}{uv}=2. \end{cases}$ 6.213. $\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

6.214. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14. \end{cases}$

6.215. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$ 6.216. $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

6.217. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$ 6.218. $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3, \end{cases} \quad a \neq 0.$

6.219. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$ **6.220.** $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

6.221. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$

6.222. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=1{,}5. \end{cases}$

6.223. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

6.224. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$ **6.225.** $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3, \\ x+y=17. \end{cases}$

6.226. $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{y+\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)\,y+(y^2+1)\,x=4xy. \end{cases}$

6.227. $\begin{cases} \sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3, \\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1, \\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0. \end{cases}$

6.228. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$ **6.229.** $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$

6.230. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

6.231. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

6.232. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

6.233. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1, \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

6.234. $\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u}+v^{-1/2}\sqrt[3]{v}=1{,}5, \\ uv=64. \end{cases}$

6.235. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$

6.236. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

6.237. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$

6.238. $\begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 1\right)^2} = 1{,}6, \\ xy = 2. \end{cases}$

6.239. $\begin{cases} |2x+3y| = 5, \\ |2x-3y| = 1. \end{cases}$ **6.240.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y} + 2 + \dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$

6.241. $\begin{cases} u - v + \sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}} = \dfrac{12}{u+v}, \\ u^2 + v^2 = 41. \end{cases}$

6.242. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 18 = 2y(4y-9). \end{cases}$

6.243. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-88} + \sqrt{x+6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-88} = 1 + 2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

6.244. Розв'язати рівняння

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + \dots + (x+9)(x+10) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 10.$$

6.245. Знайти коефіцієнти m і n квадратного тричлена $x^2 + mx + n$, коли відомо, що його остачі при діленні на двочлени $x - m$ і $x - n$ дорівнюють відповідно m і n.

6.246. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два корені. Скласти нове квадратне рівняння, у якого один із коренів на одиницю менший від більшого кореня, а інший на одиницю більший за менший корінь заданого рівняння.

6.247. Визначити, при яких значеннях m один із коренів рівняння $z^3 - (m^2 - m + 7)z - (3m^2 - 3m - 6) = 0$ дорівнює -1. Відшукати два інших корені рівняння при цих значеннях m.

6.248. Показати, що коли коефіцієнти a, b і c рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ пов'язані умовою $2b^2 - 9ac = 0$, то відношення коренів рівняння дорівнює 2.

6.249. Показати, що коли a і b — корені рівняння $x^2 + px + 1 = 0$, а b і c — корені рівняння $x^2 + qx + 2 = 0$, то $(b - a)(b - c) = pq - 6$.

6.250. При яких значеннях a рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ і $x^2 + x + a = 0$ мають спільний корінь?

6.251. При якому додатному значенні p корені рівняння $5x^2 - 4(p+3)x + 4 = p^2$ протилежні за знаком? Знайти ці корені.

6.252. Знайти коефіцієнти рівняння $x^2 + px + q = 0$ за умови, що різниця коренів рівняння дорівнює 5, а різниця їхніх кубів дорівнює 35.

6.253. Скласти квадратне рівняння з коренями $(a+b)^2$ і $(a-b)^2$, якщо a і b — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

6.254. Позначимо через α і β корені рівняння $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Не розв'язуючи заданого рівняння, скласти нове квадратне рівняння з числовими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють $\dfrac{\alpha}{\beta - 1}$ і $\dfrac{\beta}{\alpha - 1}$.

6.255. Показати, що серед коренів рівняння $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$ є тільки один додатний і тільки один від'ємний корені (самі корені знаходити не обов'язково).

Група В

Розв'язати рівняння (6.256—6.302):

6.256. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16.$

6.257. $u^3 - (2a+1)u^2 + (a^2 + 2a - b^2)u + (b^2 - a^2) = 0.$

6.258. $x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + (a^2 - a) = 0.$

6.259. $x^3 - (3a-1)x^2 + (2a^2 - 3a)x + 2a^2 = 0.$

6.260. $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1).$

6.261. $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2 + a)x - (a^2 - a) = 0.$

6.262. $(x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) = 6.$

6.263. $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64.$

6.264. $x^3 - x^2 - \dfrac{8}{x^3 - x^2} = 2.$

6.265. $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2 + 2a - m)x - (a^2 - m) = 0.$

6.266. $x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - b)x - (a^3 - ab) = 0;\ b \geqslant 0.$

6.267. $x^3 - (p^2 - p + 7)x - 3(p^2 - p - 2) = 0.$

6.268. $z^3 - (2p+1)z^2 + (p^2 + 2p - q)z - (p^2 - q) = 0.$

6.269. $x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 2\sqrt{3}a - 9)x - (2a^2\sqrt{3} - 12a + 6\sqrt{3}) = 0.$

6.270. $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$

6.271. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1).$

6.272. $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0.$

6.273. $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0.$

6.274. $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$ **6.275.** $\dfrac{2+x}{2-x} + \sqrt{x} = 1 + x.$

6.276. $\dfrac{20}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + x = 22.$

6.277. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x.$

6.278. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16.$

6.279. $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2.$

6.280. $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0.$

6.281. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$

6.282. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$ (обмежитися відшуканням додатних коренів).

6.283. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16.$

6.284. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

6.285. $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\dfrac{4}{3}x+2.$

6.286. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

6.287. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}.$

6.288. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$

6.289. $x^{4/5}-7x^{-2/5}+6x^{-1}=0.$

6.290. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

6.291. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}.$

6.292. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

6.293. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\sqrt[7]{\dfrac{x^2}{x+\sqrt{2}}}.$

6.294. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$

6.295. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8.$

6.296. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

6.297. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}.$

6.298. $\dfrac{(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2})^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}.$

6.299. $\dfrac{2}{19}(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32})=\sqrt{\dfrac{21+x}{16+x}}.$

6.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

6.301. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

6.302. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$

Розв'язати системи рівнянь (6.303—6.341):

6.303. $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=16, \\ (x-y)(x^2+y^2)=40. \end{cases}$

6.304. $\begin{cases} \dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1, \\ \dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1, \\ -\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1. \end{cases}$

6.305. $\begin{cases} uvx^2=8, \\ vx^2w=24, \\ x^2wu=12, \\ u+v+w=x+4 \end{cases}$ (обмежитися відшуканням додатних розв'язків).

6.306. $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ 3x+2y+z=0, \\ 3(x+2)^3+2(y+1)^3+(z+1)^3=27. \end{cases}$

6.307. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

6.308. $\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+zx=9, \\ zx+xy=5. \end{cases}$ 6.309. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

6.310. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}. \end{cases}$

6.311. $\begin{cases} 10(x^4+y^4)=-17(x^3y+xy^3), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

6.312. $\begin{cases} x-y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^3-y^3+z^3=36. \end{cases}$

6.313. $\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y)=60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x)=105. \end{cases}$

6.314. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1{,}5, \\ xyz=8. \end{cases}$

6.315. $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ 2xy^2-x^2y=1 \end{cases}$ (обмежитися відшуканням цілочислових розв'язків).

6.316. $\begin{cases} uv+vw=2a^2, \\ vw+wu=2a^2-a-1, \\ wu+uv=2a^2+a-1. \end{cases}$

6.317. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

6.318. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30. \end{cases}$ 6.319. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2. \end{cases}$

6.320. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$ 6.321. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12, \\ (xy)^2+xy=6. \end{cases}$

6.322. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3. \end{cases}$ 6.323. $\begin{cases} 8x+\dfrac{8}{y}=3y^2, \\ y+\dfrac{1}{x}=3x^2. \end{cases}$

6.324. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$ 6.325. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

6.326. $\begin{cases} 9(u^4+v^4)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$ 6.327. $\begin{cases} xy+\dfrac{y}{x}=2(x^2+y^2), \\ xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2. \end{cases}$

6.328. $\begin{cases} (u^2+v^2)(u+v)=15uv, \\ (u^4+v^4)(u^2+v^2)=85u^2v^2. \end{cases}$

6.329. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ (обмежитися відшуканням цілочислових розв'язків).

6.330. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

6.331. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$

6.332. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3, \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3, \\ \sqrt{xyz}=1. \end{cases}$

6.333. $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

6.334. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$

6.335. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8, \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12. \end{cases}$

6.336. $\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y), \\ x^2-y^2=41. \end{cases}$

6.337. $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$

6.338. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}. \end{cases}$

6.339. $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

6.340. $\begin{cases} u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12, \\ v\sqrt{u^2-v^2}=12. \end{cases}$

6.341. $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162. \end{cases}$

6.342. Задано рівняння $ax^2+bx+c=0$. Нехай $S_n=\alpha^n+\beta^n$, де α і β — корені рівняння. Знайти залежність між S_n, S_{n+1}, S_{n+2}.

6.343. Числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $x^3+px^2+qx+r=0$. Треба: 1) скласти рівняння з коренями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1; 2) скористатися результатом завдання 1) для відшукання коренів рівняння $x^3-3\sqrt{2}x^2+7x-3\sqrt{2}=0$.

6.344. Знайти коефіцієнти a і b рівняння $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$, коли відомо, що серед його коренів є три рівних цілих числа.

6.345. Знайти коефіцієнти p і q рівняння $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$, коли відомо, що серед його коренів є дві пари рівних між собою чисел.

6.346. Для рівняння $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ добуток суми його коренів на суму їхніх обернених величин виразити через коефіцієнти a і b.

6.347. Показати, що рівність $ab = c$ виражає необхідну і достатню умову того, що серед коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ є два числа, сума яких дорівнює нулю.

6.348. Розв'язати рівняння $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$, коли відомо, що серед його коренів є два числа, обернені за абсолютною величиною і протилежні за знаком.

6.349. Розв'язати рівняння $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ і $6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, коли відомо, що вони мають один спільний корінь.

6.350. Скласти рівняння третього степеня за його коренями x_1^2, x_1x_2 і x_2^2, якщо числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.

6.351. Розв'язати рівняння $x^3 - 6x^2 - 39x - 10 = 0$ і $x^3 + x^2 - 20x - 50 = 0$, скориставшись тим, що один із коренів першого рівняння в два рази більший за один із коренів другого рівняння.

6.352. Розв'язати рівняння $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$ і $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, скориставшись тим, що у них є спільний корінь.

6.353. Знайти всі значення λ, при яких рівняння $\lambda x^3 - x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ і $\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ мають спільний корінь. Знайти цей корінь.

6.354. Розв'язати рівняння $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$, коли відомо, що два з його коренів x_1 і x_2 задовольняють співвідношення $2x_1 - 4x_2 = 1$.

6.355. Показати, що для всякого натурального числа n виконується рівність

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

і за її допомогою розв'язати рівняння

$$(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{342}\right) = 342.$$

6.356. Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 2 = 0$, коли відомо, що вони мають принаймні одну пару коренів, різниця між якими дорівнює 1.

6.357. Розв'язати рівняння $3x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 21x + 6\sqrt{3} = 0$, коли відомо, що добуток двох його коренів дорівнює 1.

6.358. Розв'язати рівняння $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$ і $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, коли відомо, що один із коренів першого рівняння в два рази менший за один із коренів другого рівняння.

6.359. Знайти всі три корені рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, якщо його коефіцієнти задовольняють умову $ad = bc$.

6.360. Показати, що умова $kb^2 - (k + 1)^2 ac = 0$ $(k \neq 0)$ є необхідною і достатньою для того, щоб відношення коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнювало k.

6.361. Розв'язати рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, якщо його коефіцієнти a, b, c і d у вказаному порядку утворюють геометричну прогресію із заданим знаменником q.

6.362. Довести, що коли корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ утворюють геометричну прогресію, то один з них дорівнює $-\sqrt[3]{c}$.

6.363. Розв'язати рівняння $64x^3 - 24x^2 - 6x + 1 = 0$, коли відомо, що його корені утворюють геометричну прогресію.

6.364. 1) Нехай числа x_1, x_2 і x_3 є коренями многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тоді має місце тотожність

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Скористатися цією тотожністю для виведення формул, які пов'язують корені і коефіцієнти даного многочлена.

2) За допомогою формул, здобутих у завданні 1), знайти корені x_1, x_2 і x_3 рівняння $8x^3 - 20x^2 - 10x + 33 = 0$, склавши і розв'язавши нове кубічне рівняння з коренями $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ і $x_3 + x_1$.

6.365. Знайти корені рівняння $(x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) = 6$.

6.366. Скласти рівняння з цілими коефіцієнтами по можливості більш низького степеня, одним із коренів якого було б число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6.367. Показати, що корені рівняння $x + x^{-1} = 2\cos 40^\circ$ є також коренями рівняння $x^4 + x^{-4} = 2\cos 160^\circ$.

6.368. Розв'язати рівняння $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0$, коли відомо, що два його корені відрізняються один від одного тільки знаком.

6.369. Розв'язати рівняння $2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$, коли відомо, що воно має три корені, з яких два є протилежними числами (протилежними називаються два числа, сума яких дорівнює нулю).

6.370. Показати, що рівняння $\sqrt{x^4 + x - 2} + \sqrt[4]{x^4 + x - 2} = 6$ має єдиний додатний корінь. Знайти цей корінь.

Глава 7

ЛОГАРИФМИ. ПОКАЗНИКОВІ І ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Основні властивості і формули

Властивості показникової функції

$$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$$

1^0. Область визначення функції — множина R всіх дійсних чисел.

2^0. Область значень функції — множина R_+ всіх додатних чисел: $a^x > 0$ для будь-якого дійсного значення x.

3^0. При $a > 1$ функція зростає, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. При $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

4^0. Якщо $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Властивості логарифмічної функції

$$y = \log_a x,\ \ a > 0,\ a \neq 1$$

1^0. Область визначення функції — множина R_+ всіх додатних дійсних чисел.

2^0. Область значень функції — множина R всіх дійсних чисел.

3°. При $a > 1$ функція зростає, тобто якщо $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$. При $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 < \log_a x_1$.

Властивості логарифмів

1°. Якщо $x > 0$, то

$$x = a^{\log_a x} \tag{7.1}$$

(*основна логарифмічна тотожність*).

2°. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1. \tag{7.2}$$

3°. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0. \tag{7.3}$$

4°. Якщо $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, то

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{7.4}$$

(*формула для логарифма добутку*);

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \tag{7.5}$$

(*формула для логарифма частки*).

5°. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x^p = p \log_a x, \tag{7.6}$$

де p — будь-яке дійсне число (*формула для логарифма степеня*).

6°. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{7.7}$$

для будь-якого дійсного числа $b > 0$ і $b \neq 1$ (*формула переходу до нової основи логарифма*).

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{або} \quad \log_b b \cdot \log_b a = 1; \tag{7.8}$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \quad (p \in \mathbf{R},\ p \neq 0). \tag{7.9}$$

Вказівки до розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь

1°. Показникове рівняння

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1) \tag{7.10}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) \log_c a = g(x) \log_c b, \tag{7.11}$$

яке дістаємо логарифмуванням рівняння (7.10) за будь-якою основою $c > 0$, $c \neq 1$.

Зокрема, рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

2^0. Коренями рівняння

$$(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)} \qquad (7.12)$$

вважаються тільки розв'язки мішаної системи

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ u(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \qquad (7.13)$$

і ті значення x, для яких $u(x) = 1$, якщо при цих значеннях визначені $f(x)$ і $g(x)$. Функція виду $(u(x))^{f(x)}$ визначена тільки при $u(x) > 0$, тому ті значення x, які формально задовольняють рівність (7.12), але при яких $u(x) \leqslant 0$, не прийнято вважати коренями рівняння (7.12).

3^0. Логарифмічне рівняння

$$\log_a f(x) = b \qquad (7.14)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = a^b. \qquad (7.15)$$

4^0. Логарифмічне рівняння

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (7.16)$$

рівносильне кожній із таких систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \qquad (7.17)$$

Щоб розв'язати рівняння (7.16), переходять тільки до однієї з цих систем (до тої, яка простіша) або розв'язують рівняння $f(x) = g(x)$, яке може мати корені, сторонні для початкового рівняння, і перевіряють кожний з коренів підстановкою у початкове рівняння.

5^0. Для розв'язування рівнянь

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x), \qquad (7.18)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x), \qquad (7.19)$$

$$p \log_a f(x) = \log_a u(x) \qquad (7.20)$$

з використанням формул (7.4) — (7.6) їх приводять відповідно до вигляду

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = \log_a u(x), \qquad (7.21)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a u(x), \qquad (7.22)$$

$$\log_a (f(x))^p = \log_a u(x) \qquad (7.23)$$

і далі розв'язують відповідно до вказівки 4^0.

Із знайдених коренів треба включити у відповідь ті, для яких $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $u(x) > 0$, або перевірити кожний з них підстановкою в початкове рівняння.

6^0. Якщо при розв'язуванні рівняння за допомогою формул (7.4) — (7.6) застосовують перетворення виду $\log_a (f(x)\, g(x))$, $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a (f(x))^p$, де p — парне число, то виникає небезпека втрати коренів заданого рівняння. Щоб запобігти можливій втраті коренів, треба користуватися вказаними формулами у такому вигляді:

$$\log_a (f(x)\, g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|, \qquad (7.24)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|, \qquad (7.25)$$

$$\log_a (f(x))^p = p \log |f(x)|,\ p \text{ — парне число.} \qquad (7.26)$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{5} \cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}} - 0{,}04^{1-x} = 0$.

$\triangle$ Тут всі степені можна звести до однієї основи 5. Маємо

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}},\ 0{,}2^{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} = 5^{-\frac{1}{2x}},\ 0{,}04^{1-x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1-x} =$$

$$= 5^{-2(1-x)}.$$

Тоді рівняння має вигляд

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2x}} - 5^{-2(1-x)} = 0 \text{ або } 5^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}} = 5^{-2(1-x)}.$$

Згідно з вказівкою 1^0, перейдемо до рівносильного рівняння $\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = -2(1-x)$. Після перетворень дістанемо $\begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 = 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 1/4$. $\blacktriangle$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $35 \cdot 3^{x^2} - 35 \cdot 5^{2x} - 3^{x^2} + 5^{2x} = 0$.

$\triangle$ Згрупувавши подібні члени, маємо $3^{x^2}(35 - 1) - 5^{2x}(35 - 1) = 0$ або $3^{x^2} = 5^{2x}$. Логарифмуючи обидві частини рівняння за основою 10 (див. вказівку 1^0), дістаємо рівносильне рівняння

$$x^2 \lg 3 = 2x \lg 5,\ \text{або } x(x \lg 3 - 2 \lg 5) = 0,$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = (2 \lg 5)/(\lg 3)$. $\blacktriangle$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$.

$\triangle$ Оскільки $4^{\sqrt{x}} = 2^{2\sqrt{x}}$ і $2^{\sqrt{x}-1} = 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}}$, то дане рівняння набирає вигляду $2^{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$. Введемо заміну $2^{\sqrt{x}} = y$, де $y > 0$ в силу властивості 2^0 показникової функції. Тоді дістанемо рівняння $y^2 - \frac{9}{2} y + 2 = 0$, корені якого $y_1 = 4$, $y_2 = 1/2$. Із рівняння $2^{\sqrt{x}} = 4$ маємо $2^{\sqrt{x}} = 2^2$, звідки $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$. Із рівняння $2^{\sqrt{x}} = 1/2$ знаходимо $2^{\sqrt{x}} = 2^{-1}$, звідки $\sqrt{x} = -1$, що неможливо. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 4$. $\blacktriangle$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|x - 2|^{x^2-2x} = |x - 2|^{5x-10}$.

$\triangle$ Згідно з вказівкою 2^0, коренями рівняння є тільки розв'язки мішаної системи

$$\begin{cases} |x - 2| > 0, \\ |x - 2| \neq 1, \\ x^2 - 2x = 5x - 10, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 3,\ x \neq 1, \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

1, можливо, розв'язки рівняння $|x-2|=1$. Із двох коренів рівняння $x^2-7x+10=0$ розв'язком системи є одне число $x=5$, а вимогу $|x-2|=1$ задовольняють значення $x=3$ і $x=1$, які також є розв'язками системи, оскільки при цих значеннях x функції x^2-2x і $5x-10$ визначені. Таким чином, дістаємо відповідь: $x=1$, $x=3$, $x=5$. ▲

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2(\lg x-\lg 6)=\lg x-2\lg(\sqrt{x}-1)$.

△ Враховуючи область визначення логарифмічної функції, квадратного кореня і вказівку 5⁰, дістаємо систему, рівносильну заданому рівнянню:

$$\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x}-1>0, \\ \lg\dfrac{x^2}{36}=\lg\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ \dfrac{x^2}{36}=\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}. \end{cases}$$

Обидві частини рівняння поділимо на x (при цьому не відбудеться втрата коренів, оскільки $x>0$) і помножимо на $36(\sqrt{x}-1)^2$ (причому не появляться сторонні корені, оскільки $x\neq 1$). Тоді дістанемо систему $\begin{cases} x>1, \\ x(\sqrt{x}-1)^2=36. \end{cases}$ Із рівняння $(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))^2=36$ знаходимо $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq -6$, оскільки $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)>0$. Далі маємо $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$ або $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0$. Отже, $\sqrt{x}=3$, звідки $x=9>1$; $\sqrt{x}=-2$, що неможливо. Таким чином, дістаємо відповідь: $x=9$. ▲

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/16}(1-x^2)^2+2.$$

△ Перейдемо до основи 1/4. Маємо:

$\log_{0,5}\sqrt{1+x}=\log_{1/4}(1+x)$ (див. формулу (7.7) або (7.9));

$$\log_{1/16}(1-x^2)^2=\frac{\log_{1/4}(1-x^2)^2}{\log_{1/4}\frac{1}{16}}=\frac{2\log_{1/4}|1-x^2|}{2}=$$

$$=\log_{1/4}|1-x^2| \text{ (див. формулу (7.7) і вказівку } 6^0);$$

$$2=\log_{1/4}\frac{1}{16} \text{ (див. формулу (7.6)).}$$

У результаті маємо рівняння

$$\log_{1/4}(1+x)+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/4}|1-x^2|+\log_{1/4}\frac{1}{16}.$$

Враховуючи область визначення логарифмічної функції, знаходимо

$$\begin{cases} 1+x>0, \\ 1-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1, \\ x<1; \end{cases} \quad -1<x<1.$$

При цих значеннях x маємо $1 - x^2 > 0$ і $|1 - x^2| = 1 - x^2$. Далі, згідно з вказівкою 5^0, дістаємо

$$\log_{1/4} (1 + x)(1 - x)^3 = \log_{1/4} \frac{1 - x^2}{16}.$$

Це рівняння рівносильне мішаній системі

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ (1 + x)(1 - x)^3 = (1 - x^2)/16. \end{cases}$$

Обидві частини рівняння останньої системи поділимо на $(1 + x)(1 - x) > 0$, причому втрати коренів не буде. Тоді дістанемо

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ (1 - x)^2 = 1/16. \end{cases}$$

Із рівняння $1 - x = 1/4$ знаходимо $x = 3/4$, причому $x \in (-1; 1)$. Із рівняння $1 - x = -1/4$ маємо $x = 5/4$, тобто x не задовольняє нерівності $-1 < x < 1$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 3/4$. ▲

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{\lg x + 1}$.

△ Оскільки логарифмічна функція визначена при $x > 0$, то ліва і права частини даного рівняння додатні. Логарифмуючи їх за основою 10 і використовуючи формули (7.6) і (7.2), дістаємо

$$\frac{\lg x + 5}{3} \cdot \lg x = \lg x + 1.$$

Введемо заміну $y = \lg x$ і розв'яжемо рівняння $y^2 + 5y = 3y + 3$. Маємо $y^2 + 2y - 3 = 0$, звідки $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Із рівняння $\lg x = -3$ дістаємо $x = 10^{-3}$, а із рівняння $\lg x = 1$ знаходимо $x = 10$. Таким чином, $x = 0{,}001$, $x = 10$. ▲

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_x (2x^2 - 4x + 3) = 2$.

△ Використовуючи вказівку 3^0 і враховуючи обмеження, що накладаються на основу логарифма, запишемо рівносильну даному рівнянню систему

$$\begin{cases} x > 0, \quad x \neq 1, \\ 2x^2 - 4x + 3 = x^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, звідки $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ (не підходить). Таким чином, $x = 3$. ▲

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\log_3 (x + 6) \cdot \log_x 3 = 2$.

△ Враховуючи область визначення логарифмічної функції, обмеження, що накладаються на основу логарифма, і формулу (7.8), дістаємо рівносильну даному рівнянню систему

$$\begin{cases} x + 6 > 0, \\ x > 0, \quad x \neq 1, \\ \log_3 (x + 6) \cdot \dfrac{1}{\log_3 x} = 2. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння цієї системи. Оскільки $x \neq 1$, то $\log_3 x \neq 0$, і рівняння набирає вигляду $\log_3 (x + 6) = 2 \log_3 x$, або $\log_3 (x + 6) = \log_3 x^2$, звідки $x^2 = x + 6$ (див. вказівку 4^0). Знаходимо корені цього рівняння: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. З них тільки $x = 3$ задовольняє умови $x + 6 > 0$, $x > 0$ і $x \neq 1$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 3$. ▲

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\lg x^2 = 0{,}25 \lg (4x+3)^4$.

△ Враховуючи область визначення логарифмічної функції, робимо висновок, що $x \neq 0$, $4x+3 \neq 0$. Для перетворення $\lg (4x+3)^4$ застосовуємо формулу (7.26) (див. вказівку 6°). Тоді $0{,}25 \lg (4x+3)^4 = 0{,}25 \cdot 4 \lg |4x+3| = \lg |4x+3|$. У результаті дістаємо рівняння $\lg x^2 = \lg |4x+3|$, рівносильне заданому.

Якщо $4x+3 > 0$, тобто $x > -3/4$, то $|4x+3| = 4x+3$, і $x^2 = 4x+3$. Знаходимо корені цього рівняння: $x_1 = 2+\sqrt{7} > -3/4$, $x_2 = 2-\sqrt{7} > -3/4$. Якщо $4x+3 < 0$, тобто $x < -3/4$, то $|4x+3| = -4x-3$, і $x^2 = -4x-3$. Знаходимо корені цього рівняння: $x_1 = -1 < -3/4$, $x_2 = -3 < -3/4$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 2 \pm \sqrt{7}$, $x = -1$, $x = -3$. ▲

Зауваження. Вираз $0{,}25 \lg (4x+3)^4$ можна замінити тотожно рівним йому виразом $\lg ((4x+3)^4)^{0,25}$ (див. вказівку 5°), але твердження $\lg ((4x+3)^4)^{0,25} = \lg (4x+3)$ було б невірним. Справа в тому, що при використанні правила піднесення степеня до степеня треба враховувати таку властивість степеневої функції: при будь-якому $n \in \mathbf{N}$ $(x^{2n})^{1/2n} = |x|$, а не x (див. формулу (2.24)). Тому $\lg ((4x+3)^4)^{0,25} = \lg ((4x+3)^4)^{1/4} = \lg |4x+3|$.

Група А

Спростити (7.001—7.015):

7.001. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7.002. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

7.003. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$. **7.004.** $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7.005. $$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}.$$

7.006. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

7.007. $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

7.008. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6}\right)$.

7.009. $\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}} \cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}} \cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}} \ldots N^{\frac{1}{\log_{512} N}}\right)^{1/15}$ (основою логарифма є натуральні степені числа 2, що йдуть підряд).

7.010. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a} - 3^{\log_{27} (a^2+1)^3} - 2a\right) : \left(7^{4 \log_{49} a} - 5^{0,5 \log_{\sqrt{5}} a} - 1\right)$.

7.011. $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{1/a} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$.

7.012. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} b - 2a^{\log_a b+1} b^{\log_b a+1} + ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

7.013. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}} + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{2\log_a 4}\right) \cdot 4^{-\frac{2}{\log_9 4}} - a^2}{1-a}$.

7.014. $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1$.

7.015. $\dfrac{1-\log^3_a b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \cdot \log_a \dfrac{a}{b}}$.

7.016. Якщо $\log_a 27 = b$, то чому дорівнює $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$?

7.017. Показати, що за умов $x > 0$ і $y > 0$ із рівності $x^2 + 4y^2 = 12xy$ випливає рівність

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = 0{,}5(\lg x + \lg y).$$

7.018. Обчислити суму $2^x + 2^{-x}$, якщо $4^x + 4^{-x} = 23$.

7.019. Довести, що коли $y = 2^{x^2}$ і $z = 2^{y^2}$, то $x = \pm\sqrt{0{,}5 \log_2 \log_2 z}$. Указати всі значення z, при яких x набуває дійсних значень.

Розв'язати рівняння (7.020—7.046):

7.020. $\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - 3^{1/x}\right)$.

7.021. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$.

7.022. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1$.

7.023. $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0{,}5 = 0$.

7.024. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$.

7.025. $\log_2 182 - 2\log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$.

7.026. $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$.

7.027. $\lg(x+1{,}5) = -\lg x$.

7.028. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$.

7.029. $0{,}25^{\log_2 \sqrt{x+3} - 0{,}5\log_2(x^2-9)} = \sqrt{2(7-x)}$.

7.030. $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$.

7.031. $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0{,}2}(x-2) = 4$.

7.032. $\dfrac{2 - \lg 4 + \lg 0{,}12}{\lg\left(\sqrt{3x+1} + 4\right) - \lg 2x} = 1$.

7.033. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$.

7.034. $\lg\left(3^x - 2^{4-x}\right) = 2 + 0{,}25\lg 16 - 0{,}5x\lg 4$.

7.035. $\log_3\left(81^x + 3^{2x}\right) = 3\log_{27} 90$.

7.036. $3x - \log_6 8^x = \log_6\left(3^{3x} + x^2 - 9\right)$.

7.037. $\log_6\left(3^{x^2} + 1\right) - \log_6\left(3^{2-x^2} + 9\right) = \log_6 2 - 1$.

7.038. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0.$

7.039. $\lg\left(10^{\lg(x^2-21)}\right)-2=\lg x-\lg 25.$

7.040. $\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1.$

7.041. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}}+11\lg 2=11.$

7.042. $x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$

7.043. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0.$ **7.044.** $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$

7.045. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8.$

7.046. $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1.$

7.047. Знайти натуральне число n із рівності

$$3^2\cdot3^5\cdot3^8\ldots3^{3n-1}=27^5$$

Розв'язати рівняння (7.048—7.127):

7.048. $0,5\left(\lg(x^2-55x+90)-\lg(x-36)\right)=\lg\sqrt{2}.$

7.049. $\lg(5-x)-\dfrac{1}{3}\lg(35-x^3)=0.$

7.050. $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0.$

7.051. $\dfrac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1.$

7.052. $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8.$

7.053. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0.$

7.054. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$

7.055. $\log_3(3^x-8)=2-x.$

7.056. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot5^{\lg x-1}-13\cdot7^{\lg x-1}.$

7.057. $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot5^{x+4}-19\cdot3^{x+5}.$

7.058. $\dfrac{\log_5(\sqrt{2x-7}+1)}{\log_5(\sqrt{2x-7}+7)}=0,5.$

7.059. $\sqrt{3}\cdot3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81.$

7.060. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot0,125^{1/x}}}=4\sqrt[3]{2}.$

7.061. $\sqrt{2}\cdot0,5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=0.$

7.062. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0,25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1.$

7.063. $2^{x^2-3}\cdot5^{x^2-3}=0,01(10^{x-1})^3.$

7.064. $0,6^x\left(\dfrac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\dfrac{27}{125}\right)^3.$

7.065. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0,2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}$.

7.066. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0,5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

7.067. $2,5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0,4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0,1^{5}$.

7.068. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.

7.069. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

7.070. $4^{\log_9 x^2}+\log_{\sqrt{3}}3=0,2\,(4^{2+\log_9 x}-4^{\log_9 x})$.

7.071. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0,2$.

7.072. $10^{2/x}+25^{1/x}=4,25\cdot 50^{1/x}$.

7.073. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

7.074. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$.

7.075. $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$.

7.076. $9^{\sqrt{x-5}}-27=6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}$.

7.077. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$.

7.078. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$.

7.079. $2\log_x 27-3\log_{27}x=1$.

7.080. $\lg(\sqrt{6+x}+6)=\frac{2}{\log_{\sqrt{x}}10}$.

7.081. $\log_5 x+\log_x 25=\operatorname{ctg}^2\frac{25\pi}{6}$.

7.082. $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$. 7.083. $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$.

7.084. $\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$.

7.085. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$.

7.086. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0$. 7.087. $7^x(\sqrt{2})^{2x^2-6}-\left(\frac{7}{4}\right)^x=0$.

7.088. $3\cdot 4^{\log_x 2}-46\cdot 2^{\log_x 2-1}=8$.

7.089. $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}$.

7.090. $27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0$.

7.091. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$.

7.092. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

7.093. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=2/3$.

7.094. $4^{\log_5 x^2}-4^{\log_5 x+1}+4^{\log_5 x-1}-1=0$.

7.095. $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_x a}=10/3.$

7.096. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1.$

7.097. $\log_3(x-3)^2+\log_3|x-3|=3.$

7.098. $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{x+3}=2-0{,}5\lg 625.$

7.099. $\lg(3-x)-\frac{1}{3}\lg(27-x^3)=0.$

7.100. $2\lg x-\lg 4=-\lg(5-x^2).$

7.101. $\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2).$

7.102. $2\lg\sqrt{4-x}+\lg(6-x)=1.$

7.103. $\frac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1.$ 7.104. $\frac{\lg x^2}{\lg(6x-5)}=1.$

7.105. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0.$

7.106. $\log_x\sqrt{2}-\log_x^2\sqrt{2}=\log_3 27-\log_x(2x).$

7.107. $(\log_2 x-3)\log_2 x+2(\log_2 x+1)\log_2\sqrt[3]{2}=0.$

7.108. $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)+3{,}6=0.$

7.109. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0.$

7.110. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}.$

7.111. $\frac{1}{3}\lg(271+3^{2\sqrt{x}})+\lg 10=2.$

7.112. $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}}-\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{4}}+\sqrt{\frac{x}{3}}=\sqrt[4]{3^7}.$

7.113. $x^{\lg x}=1000x^2.$ 7.114. $\lg(x(x+9))+\lg\frac{x+9}{x}=0.$

7.115. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}.$

7.116. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\frac{2}{\log_4 x}.$

7.117. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

7.118. $5^{\log_2(x^2-21)}\cdot 0{,}2^2\cdot 25^{-0{,}5\log_2 x}=1.$

7.119. $4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 0{,}25^{\log_8(2x-3)}=\sqrt[3]{16}.$

7.120. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$

7.121. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$

7.122. $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}.$

7.123. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8.$

7.124. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2=1+\log_5(2^{x-2}+1).$

7.125. $27x^{\log_{27}x}=x^{10/3}.$ 7.126. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10.$

7.127. $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1).$

Розв'язати системи рівнянь (7.128—7.149):

7.128. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

7.129. $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

7.130. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 2 - \lg 5, \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 1{,}2 + 1. \end{cases}$

7.131. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

7.132. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

7.133. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2, \\ xy = 27. \end{cases}$ 7.134. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$

7.135. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

7.136. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

7.137. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = 2{,}5, \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6. \end{cases}$

7.138. $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5, \\ x^{y^2+2} = 125. \end{cases}$

7.139. $\begin{cases} 8 \cdot (\sqrt{2})^{x-y} = 0{,}5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$

7.140. $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$ 7.141. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$

7.142. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$ 7.143. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$

7.144. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$ 7.145. $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases}$

7.146. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8, \\ \log_3\left(\log_{1/9} \dfrac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$ 7.147. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1, \\ \log_{xy}(x+y) = 0. \end{cases}$

7.148. $\begin{cases}(x+y)\cdot 2^{y-2x}=6{,}25,\\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5.\end{cases}$

7.149. $\begin{cases}8^{\log_8(x-4y)}=1,\\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8.\end{cases}$

Група Б

Спростити вирази (7.150.—7.156):

7.150. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$.

7.151. $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}+2)^{1/2}-\log_b a-\log_a b$.

7.152. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+$
$+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}$.

7.153. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2}2}}+1\right)^{1/2}$.

7.154. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a/b^3}}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12})$.

7.155. $(6(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b$
при $a>1$.

7.156. $\dfrac{\log_a b+\log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}$.

7.157. Відомо, що $\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$, $\log_c x=\gamma$, $\log_d x=\delta$ і $x\neq 1$. Знайти $\log_{abcd} x$.

7.158. Відомо, що $\beta=10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ і $\gamma=10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Знайти залежність α від γ.

7.159. Довести, що $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

7.160. Спростити вираз $\log_{a+b} m+\log_{a-b} m-2\log_{a+b} m\times$ $\times\log_{a-b} m$, коли відомо, що $m^2=a^2-b^2$.

7.161. Знайти $\log_{30} 8$, коли відомо, що $\lg 5=a$ і $\lg 3=b$.

7.162. Довести, що $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

7.163. Знаючи, що $\lg 2=a$ і $\log_2 7=b$, знайти $\lg 56$.

7.164. Знаючи, що $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ і $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, показати, що $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Розв'язати рівняння (7.165—7.258):

7.165. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

7.166. $\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1$.

7.167. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

7.168. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$.

7.169. $(16^{\sin x})^{\cos x} + \frac{6}{4^{\sin^2(x-\pi/4)}} - 4 = 0$.

7.170. $\log_2 (2-x) - \log_2 (2-\sqrt{x}) = \log_2 \sqrt{2-x} - 0,5$.

7.171. $5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{0,25} x - 1} = 26/5$.

7.172. $\sqrt{2 \log_8 (-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

7.173. $2 \lg x^2 - (\lg (-x))^2 = 4$.

7.174. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

7.175. $\lg (x^3 + 8) - 0,5 \lg (x^2 + 4x + 4) = \lg 7$.

7.176. $2^{\log_5 x^2} - 2^{1+\log_5 x} + 2^{\log_5 x - 1} - 1 = 0$.

7.177. $\frac{\log_2 (9 - 2^x)}{3 - x} = 1$.

7.178. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{3}$.

7.179. $\log_{a^2} x^2 + \log_a (x-1) = \log_a \log_{\sqrt{5}} 5$.

7.180. $x^{2 \lg^2 x} = 10x^3$.

7.181. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0,5$.

7.182. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2}{2a - x} = 1$.

7.183. $5^{-2 \log_{0,04}(3-4x^2)} + 1,5 \log_{1/8} 4^x = 0$.

7.184. $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = 11$.

7.185. $6 - (1 + 4 \cdot 9^{4 - 2\log_{\sqrt{3}} 3}) \log_7 x = \log_x 7$.

7.186. $\log_{12} (4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x \log_{12} 27$.

7.187. $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$.

7.188. $\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2,5$.

7.189. $\log_x m \cdot \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m - x}} = 1$.

7.190. $\log_2 3 + 2 \log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}$.

7.191. $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5{,}5.$

7.192. $\sqrt{3\log_2^2 x - 1 - 9\log_x^2 2} = 5.$

7.193. $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36.$

7.194. $\log_x 2 - \log_4 x + 7/6 = 0.$

7.195. $\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1.$

7.196. $3^{\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \dots + \log_3 x^8} = 27x^{30}.$

7.197. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}} \cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}} = 125^{x-4} \cdot 0{,}04^{x-2}.$

7.198. $\left(3 \cdot \left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 3/\sqrt[10]{3}.$

7.199. $\log_2 \log_3 (x^2 - 16) - \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$

7.200. $\frac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_9 (12 - x).$

7.201. $3 \lg 2 + \lg \left(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1\right) = \lg \left(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4\right) + 1.$

7.202. $5 \log_{x/9} x + \log_{9/x} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2.$

7.203. $20 \log_{4x} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^3 - 3 \log_{x/2} x^2 = 0.$

7.204. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

7.205. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$ 7.206. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1.$

7.207. $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$

7.208. $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \dots$ (вираз у правій частині — нескінченна геометрична прогресія).

7.209. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7.$

7.210. $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26.$

7.211. $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$

7.212. $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} 2 \cdot \log_{1/2} 2x = 0.$

7.213. $|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2.$

7.214. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$

7.215. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$

7.216. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$

7.217. $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^2+(\sqrt{7-\sqrt{48}})^2=14.$

7.218. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{1/27}(x-1)}=\frac{\log_5 27}{\log_5 243}.$

7.219. $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24.$

7.220. $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0.$

7.221. $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^2+2}=0.$

7.222. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$

7.223. $\log_5(2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0,01\cdot 5^{3x+1})=3x-1.$

7.224. $\frac{8^x+2^x}{4^x-2}=5.$

7.225. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2.$

7.226. $2,5^{\log_3 x}+0,4^{\log_3 x}=2,9.$

7.227. $(\lg(x+20)-\lg x)\log_x 0,1=-1.$

7.228. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

7.229. $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8.$

7.230. $\log_{x+1}(x-0,5)=\log_{x-0,5}(x+1).$

7.231. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2.$

7.232. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3.$

7.233. $(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}}x-3\ (a>0,\ a\neq 1).$

7.234. $\frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3}=\frac{x^{3\lg x}}{10}.$

7.235. $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{1/5}}(x+1)=\frac{x-4}{x}.$

7.236. $3\lg(x^2)-\lg^2(-x)=9.$

7.237. $4\log_4^2(-x)+2\log_4(x^2)=-1.$

7.238. $\frac{2}{\sqrt{3}\log_2\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}}=0.$

7.239. $\lg\sqrt{10}-\lg 100=\sqrt[6]{\lg(390635-5^{\sqrt[3]{2x}})}-2,5.$

7.240. $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25.$

7.241. $\frac{\log_2(x^3+3x^2+2x-1)}{\log_2(x^3+2x^2-3x+5)}=\log_{2x}x+\log_{2x}2.$

7.242. $(16\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0,048)\lg(x^3+2x+1)=0.$

7.243. $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500.$

7.244. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2.$

7.245. $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3.$

7.246. $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=4/3.$

7.247. $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2.$

7.248. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 (x^3) + \log_2 (x^2) - 6.$

7.249. $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$. При яких значеннях a рівняння має розв'язок?

7.250. $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27.$

7.251. $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \dfrac{1}{x} = 0.$

7.252. $\dfrac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1} - 16^{\log_3 \sqrt{x}}\right) + 16^{\log_3 x} - \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = 0.$

7.253. $\log_a \sqrt{4+x} + 3\log_{a^2}(4-x) - \log_{a^4}(16-x^2)^2 = 2.$

При яких значеннях a рівняння має розв'язок?

7.254. $\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_8 (9^{x+1} - 1) = 1 + \log_8 (3^{x+1} + 1).$

7.255. $25^{\log_4 x} - 5^{\log_{16} x^2+1} = \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} - 25^{\log_{16} x}.$

7.256. $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\log_2 3 - \log_2 (3^x - 13) = 2.$

7.257. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_n (n+1) = 10\ (n \in \mathbf{N}).$

7.258. $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$ (розглянути при всіх дійсних значеннях a).

Розв'язати системи рівнянь **(7.259—7.294):**

7.259. $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2 (x+y), \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

7.260. $\begin{cases} 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0, \\ \lg (3x - y) + \lg (y + x) - 4\lg 2 = 0. \end{cases}$

7.261. $\begin{cases} (0{,}48^{x^2+2})^{2x-y} = 1, \\ \lg (x+y) - 1 = \lg 6 - \lg (x + 2y). \end{cases}$

7.262. $\begin{cases} \log_2 (x-y) = 5 - \log_2 (x+y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

7.263. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x-y) = 1 - \log_3 (x+y). \end{cases}$

7.264. $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$ **7.265.** $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1} (y+23) = 3. \end{cases}$

7.266. $\begin{cases} (x^2 + y)\, 2^{y-x^2} = 1, \\ 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$ **7.267.** $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

7.268. $\begin{cases} 9^{\sqrt[4]{xy^2}} - 27 \cdot 3^{\sqrt{y}} = 0, \\ \dfrac{1}{4}\lg x + \dfrac{1}{2}\lg y = \lg\left(4 - \sqrt[4]{x}\right). \end{cases}$

7.269. $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^{y} = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2. \end{cases}$

7.270. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3. \end{cases}$

7.271. $\begin{cases} 3^{x} \cdot 2^{y} = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2. \end{cases}$

7.272. $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5(2y-x-12) - \log_5(y-x) = \log_5(y+x). \end{cases}$

7.273. $\log_9(x^3+y^3) = \log_3(x^2-y^2) = \log_3(x+y).$

7.274. $\begin{cases} (\log_a x + \log_a y - 2)\log_{18} a = 1, \\ 2x + y - 20a = 0. \end{cases}$

7.275. $\begin{cases} (x+y)\,3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y) = x - y. \end{cases}$

7.276. $\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5, \\ \dfrac{3(x+y)}{x-y} + \dfrac{5(x-y)}{x+y} = 8. \end{cases}$

7.277. $\begin{cases} x^{y} = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64 \quad (x > 0). \end{cases}$

7.278. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ 2^{-\log_2 x} + 5^{\log_5 \frac{1}{y}} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

7.279. $\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x + y = 8 \quad (x > 0). \end{cases}$

7.280. $\begin{cases} 2(\log_{1/y} x - 2\log_{x^2} y) + 5 = 0, \\ xy^2 = 32. \end{cases}$

7.281. $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{2,5}, \\ \log_3 y \cdot \log_y(y-2x) = 1. \end{cases}$

7.282. $\begin{cases} \lg(x-3) - \lg(5-y) = 0, \\ 4^{-1}\sqrt[y]{4^x} - 8\sqrt[x]{8^y} = 0. \end{cases}$

7.283. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

7.284. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2\,(2\log_{y^2}x-\log_{1/x}y)=5. \end{cases}$

7.285. $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16}=1, \\ x-y=2 \quad (x>0). \end{cases}$ **7.286.** $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

7.287. $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^{x-0,5y}=2^{3-y}, \\ y-x=3. \end{cases}$ **7.288.** $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689. \end{cases}$

7.289. $\begin{cases} 10^{\lg 0,5(x^2+y^2)+1,5}=100\sqrt{10}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3}=\dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$

7.290. $\begin{cases} y^x=1,5+y^{-x}, \\ y^{2,5+x}=64 \quad (y>0). \end{cases}$

7.291. $\begin{cases} \lg(x+y)-\lg 5=\lg x+\lg y-\lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6)-(\lg y+\lg 6)}=-1. \end{cases}$

7.292. $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{y}{x}-\log_y^2 x=1, \\ \log_2(y-x)=1. \end{cases}$ **7.293.** $\begin{cases} (x+y)^x=(x-y)^y, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

7.294. $\begin{cases} x^{x-2y}=36, \\ 4\,(x-2y)+\log_6 x=9 \end{cases}$ (знайти тільки цілочислові розв'язки).

Група В

Спростити вирази (7.295—7.299):

7.295. $$\frac{(\lg b\cdot 2^{\log_2\lg b})^{1/2}\cdot\lg^{-1/2}b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0,5\lg\lg b^{1/2}}}}.$$

7.296. $$2\log_a^{1/2}b\left((\log_a\sqrt[4]{ab}+\log_b\sqrt[4]{ab})^{1/2}-\right.$$
$$\left.-\left(\log_a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}+\log_b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^{1/2}\right),$$ якщо $a>1$ і $b>1$.

7.297. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np}p)\cdot\sqrt{\log_n p}$.

7.298. $$\left(\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{1/2}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{1/2}\right)\sqrt{2}\log_a^{1/2}b$$ при $a>1$.

7.299. $\dfrac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b))^{1/2}}$.

7.300. Помітивши, що $675 = 9 \cdot 75$, а $135 = 3 \cdot 45$, не використовуючи таблиць, дати відповідь на питання: яке число більше $\log_{135} 675$ чи $\log_{45} 75$.

7.301. Рівняння $4^x + 10^x = 25^x$ має єдиний корінь. Знайти його і виявити: додатний він чи від'ємний; більший чи менший за одиницю.

7.302. Показати, що $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$.

7.303. Вираз $\log_m A \cdot \log_n A + \log_n A \cdot \log_p A + \log_p A \times \times \log_m A$ подати у вигляді добутку.

7.304. Показати, що $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = 1/3$.

7.305. Спростити вираз $((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} - 2)^{1/2}$ при $1 < a < b$.

7.306. При яких значеннях p рівняння $\lg(x^2 + 2px) - \lg(8x - 6p - 3) = 0$ має єдиний корінь?

7.307. При яких значеннях a рівняння $2\lg(x+3) = \lg(ax)$ має єдиний корінь?

7.308. Знайти x, якщо $(\sqrt[3]{0,5} + \sqrt[3]{4})^x = 13,5$.

Розв'язати рівняння (7.309—7.333):

7.309. $2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$.

7.310. $\left(1 + \log_x \dfrac{4-x}{10}\right) \cdot \lg x = \lg\lg 10^3 - 1$.

7.311. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

7.312. $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - 0,5} = 3^{\log_{16} x + 0,5} - 2^{2\log_{16} x - 1}$.

7.313. $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$.

7.314. $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

7.315. $2^{\mathrm{tg}(x-\pi/4)} - 2 \cdot 0,25^{-\frac{\sin^2(x-\pi/4)}{\cos 2x}} - 1 = 0$.

7.316. $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg\lg p$. При яких значеннях p рівняння має розв'язок?

7.317. $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} = 1$.

7.318. $\log_k x + \log_{\sqrt{k}} x + \dots + \lg_{\sqrt[k]{k}} x = \dfrac{k+1}{2}$ $(k \in \mathbf{N})$.

7.319. $2 - \log_{b^2}(1+x) = 3\log_b \sqrt{x-1} - \log_{b^4}(x^2-1)^2$.

7.320. $m^{1+\log_3 x} + m^{1-\log_3 x} = m^2 + 1$ $(m > 0,\ m \neq 1)$.

7.321. $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$.

7.322. $a^{2\lg x - \lg(6-x)} = 1$ $(a > 0)$.

7.323. $p^{\log_2(x+14) + \log_2(x+2)} = p^6$ $(p > 0)$.

7.324. $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1$.

7.325. $(2^x - 2 \cdot 2^{-x})^{\log_3(2x+3) - \log_3 x} = 1.$

7.326. $|x - 3|^{x^2 - x} = (x - 3)^2.$

7.327. $\log_{\sqrt{x}}(x + 12) = 8 \log_{x+12} x$ (обмежитися відшуканням цілого кореня).

7.328. $5^{\lg x} - 3^{\lg x} = 5,(3) \cdot 3^{0,5 \lg x} \cdot 5^{0,5(\lg x - 2)}.$

7.329. $|\log_2(3x - 1) - \log_2 3| = |\log_2(5 - 2x) - 1|.$

7.330. $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} = \dfrac{4}{2 - \sqrt{3}}.$

7.331. $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \dfrac{x}{3}} - 2 \log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3.$

7.332. $\log_{x+3}(3 - \sqrt{1 - 2x + x^2}) = 1/2.$

7.333. $\sqrt{\log_2(2x^2) \cdot \log_4(16x)} = \log_4 x^3.$

Розв'язати системи рівнянь (7.334—7.340):

7.334. $\begin{cases} \log_3(u + v) - \log_3(u - v) = 1, \\ u^2 - v^2 = 2. \end{cases}$

7.335. $\begin{cases} x^p = y^q, \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases}$ $(p \neq q$ і $pq \neq 0).$

7.336. $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

7.337. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2,5 \lg^2(a^2) \end{cases}$ при $a < 0.$

7.338. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

7.339. $\begin{cases} (2^{x+y})^{x^2 - xy - 8} = 1, \\ (0,37^{x-\ })^{x^2 + xy + 2x - 16} = 1. \end{cases}$

7.340. $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1. \end{cases}$

Глава 8

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Вказівки до розв'язування тригонометричних рівнянь

1°. *Найпростішими тригонометричними рівняннями* називаються рівняння виду $\sin x = a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\cos x = a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\operatorname{tg} x = a$ (де $-\infty < a < \infty$), $\operatorname{ctg} x = a$ (де $-\infty < a < \infty$). Формули розв'язування цих рівнянь мають такий вигляд (тут і далі $n \in \mathbf{Z}$ означає, що n — ціле число):

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.1}$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.2}$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.3}$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{8.4}$$

В окремих випадках при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ маємо такі формули:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.5}$$

$$\sin x = 1, \quad x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.6}$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.7}$$

$$\cos x = 0, \quad x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.8}$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.9}$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \tag{8.11}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{8.12}$$

Рівняння виду $\sin(\omega x + \varphi) = a$, $\cos(\omega x + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$, $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi) = b$ ($|a| \leqslant 1$, $\omega \neq 0$, φ, b — будь-які дійсні числа) також відносяться до найпростіших. Їх слід розв'язувати зразу за формулами (8.1) — (8.4), замінивши x на $\omega x + \varphi$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle$ Згідно з формулою (8.1), маємо $\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$. Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6} - 2x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, звідки $x = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ або $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}(6n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. $\blacktriangle$

Якщо рівняння не є найпростішим, то за допомогою тотожних перетворень його треба звести до одного або кількох найпростіших рівнянь, сукупність яких рівносильна заданому.

2°. При розв'язуванні тригонометричних рівнянь часто використовуються розклад на множники і введення нової змінної (метод підстановки).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin x = \sin 2x \cos 3x$.

$\triangle$ Застосувавши до $\sin 2x$ формулу (3.13), дістанемо

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \cos 3x, \quad \sin x (1 - 2 \cos x \cos 3x) = 0.$$

Оскільки обидва множники у лівій частині цього рівняння мають смисл при будь-яких значеннях x, то воно рівносильне сукупності двох рівнянь $\sin x = 0$ і $1 - 2\cos x \cos 3x = 0$.

Згідно з формулою (8.5), перше рівняння задовольняють значення $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Для розв'язування другого рівняння перетворимо добуток косинусів у суму за формулою (3.26). Маємо $1 - (\cos 4x + \cos 2x) = 0$. Оскільки $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$ (див. формулу (3.16)), то рівняння набирає вигляду $2\sin^2 2x - \cos 2x = 0$ або $2(1 - \cos^2 2x) - \cos 2x = 0$, звідки дістаємо $2\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$ — квадратне рівняння відносно $\cos 2x$. Покладаючи $\cos 2x = z$, маємо $2z^2 + z - 2 = 0$. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$. Оскільки $|z_2| = \left|\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right| > 1$, то рівняння $\cos 2x = z_2$ не має розв'язків. Залишається розв'язати рівняння $\cos 2x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$. За формулою (8.2) знаходимо $2x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, дістаємо відповідь: $x = \pi n$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ▲

При розв'язуванні рівняння за допомогою методу розкладання на множники воно може не бути рівносильним одержаній сукупності рівнянь, оскільки можлива поява сторонніх коренів. Щоб уникнути помилок у відповіді, треба виключити з одержаних значень невідомого ті, для яких задане рівняння не має смислу.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(1 - \sin x)(\mathrm{tg}^2 x - 3) = 0$.

△ Знайдемо значення x, що задовольняють кожне із рівнянь $1 - \sin x = 0$ і $\mathrm{tg}^2 x - 3 = 0$; якщо $\sin x = 1$, то за формулою (8.6) дістанемо

$$x = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \qquad (*)$$

якщо $\mathrm{tg}^2 x = 3$, тобто $\mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{3}$, то за формулою (8.3) маємо

$$x = \pm\pi/3 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (**)$$

Проте було б помилкою вважати відповіддю об'єднання розв'язків $(*)$ і $(**)$. Справа в тому, що початкове рівняння не має смислу для значень $x = \pi/2 + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, тому перший із передбачуваних розв'язків непридатний і відповіддю є тільки другий розв'язок $x = \pm\pi/3 + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$. ▲

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1/8$.

△ Найбільш швидкий спосіб розв'язування — множення правої і лівої частин рівності на $8\sin x$, хоча при цьому можлива поява сторонніх коренів. Щоб запобігти цьому, слід ураховувати, що в остаточну відповідь не повинні входити значення x, для яких $\sin x = 0$, тобто значення $x = \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, оскільки вони не задовольняють початкове рівняння.

Після множення на $8\sin x$ рівняння набирає вигляду

$$8\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \sin x.$$

Послідовно тричі застосувавши формулу синуса подвійного аргументу (3.13), дістанемо спочатку $4\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \sin x$, потім

$2 \sin 4x \cos 4x = \sin x$ і далі $\sin 8x = \sin x$ або $\sin 8x - \sin x = 0$. Перетворюючи за формулою (3.20) різницю синусів в добуток, дістаємо

$$\sin \frac{7x}{2} \cos \frac{9x}{2} = 0.$$

Нехай $\sin \frac{7x}{2} = 0$, тоді $\frac{7x}{2} = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$, звідки $x = \frac{2\pi k}{7}$ $(k \in \mathbf{Z})$, причому слід виключити значення $x = 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, здобуті при $k = 7n$, як сторонні для початкового рівняння.

Нехай тепер $\cos \frac{9x}{2} = 0$, тоді $\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$, звідки $x = \frac{\pi(2m+1)}{9}$ $(m \in \mathbf{Z})$, причому слід виключити значення $x = \pi(2n + 1)$ $(n \in \mathbf{Z})$, здобуті при $m = 9n + 4$ $(n \in \mathbf{Z})$, як сторонні для початкового рівняння.

Таким чином, дістаємо відповідь: $x = \frac{2\pi k}{7}$, де ціле $k \neq 7n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi(2m+1)}{9}$, де ціле $m \neq 9n + 4$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

3⁰. *Однорідними рівняннями* називаються рівняння виду

$$a \sin kx + b \cos kx = 0; \tag{8.13}$$

$$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = 0; \tag{8.14}$$

$$a \sin^3 kx + b \sin^2 kx \cos kx + c \sin kx \cos^2 kx + d \cos^3 kx = 0. \tag{8.15}$$

Рівняння

$$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = d$$

при $d \neq 0$ не є однорідним, але його можна звести до однорідного рівняння виду (8.14), замінивши d тотожно рівним йому виразом $d(\sin^2 kx + \cos^2 kx)$.

Для розв'язування рівнянь (8.13) — (8.15) у випадку $a \neq 0$ розглянемо ті значення x, при яких $\cos kx = 0$. Тоді з кожного рівняння випливає, що при тих самих значеннях x повинно і $\sin kx = 0$, а це неможливо. Отже, розв'язками цих рівнянь можуть бути тільки ті значення x, при яких $\cos kx \neq 0$. Тому якщо (при $a \neq 0$) розділити обидві частини рівняння (8.13) на $\cos kx$, рівняння (8.14) — на $\cos^2 kx$, рівняння (8.15) — на $\cos^3 kx$, то втрати коренів не буде.

У результаті дістаємо алгебраїчне рівняння відносно $\operatorname{tg} kx$, для розв'язування якого слід ввести заміну $\operatorname{tg} kx = z$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$3 \sin^2 x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x -$$

$$- \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x = 0.$$

△ Використовуючи формули зведення, дістаємо

$$3 \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Це однорідне рівняння відносно $\sin x$ і $\cos x$, причому $a \neq 0$, тобто значення x, при яких $\cos x = 0$ не будуть розв'язками заданого рівняння.

Розділивши члени рівняння на $\cos^3 x$, маємо

$$3\,\mathrm{tg}^3\, x + 3\,\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0, \quad (3\,\mathrm{tg}^2\, x - 1)(\mathrm{tg}\, x + 1) = 0;$$

$$3\,\mathrm{tg}^2\, x - 1 = 0, \quad \mathrm{tg}\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\mathrm{tg}\, x + 1 = 0, \quad \mathrm{tg}\, x = -1, \quad x = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Таким чином, дістаємо відповідь: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$ і $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ▲

При розв'язуванні рівнянь (8.13) — (8.15) у випадку $a = 0$ ділення на $\cos kx$ недопустиме, оскільки воно приводить до втрати коренів — тих значень x, при яких $\cos kx = 0$.

При $a = 0$ рівняння (8.13) стає найпростішим, а для розв'язування рівнянь (8.14) і (8.15) слід застосувати метод розкладу на множники.

4^0. Інші способи розв'язування тригонометричних рівнянь розглянемо при розв'язуванні прикладів.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $3\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos x = 4$.

△ При розв'язуванні таких рівнянь зручно використовувати формули пониження степеня (3.16) і (3.17), які мають вид $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$. Скориставшись другою із них, маємо $\frac{3(1 + \cos(x - \pi/2))}{2} - 2\cos x = 4$ і після очевидних перетворень дістаємо рівняння

$$3\sin x - 4\cos x = 5. \qquad (*)$$

Воно легко зводиться до алгебраїчного рівняння відносно $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ за допомогою формул (3.28) і (3.29), тобто до рівностей $\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2\,(x/2)}$, $\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2\,(x/2)}$, справедливих для всіх $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Зазначимо, що заміна $\sin x$ і $\cos x$ виразами, що містять $\mathrm{tg}\,(x/2)$, може привести до втрати коренів вигляду $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Чи задовольняють ці значення x початкове рівняння, з'ясовується перевіркою.

Виконавши в рівнянні (*) підстановку $\mathrm{tg}\,(x/2) = z$, яку називають «універсальною», дістаємо рівняння $z^2 - 6z + 9 = 0$. Воно має розв'язок $z = 3$. Повертаючись до змінної x, дістаємо $\mathrm{tg}\,(x/2) = 3$, звідки $x = 2\,\mathrm{arctg}\,3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Залишається перевірити, чи задовольняють рівняння (*) числа $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Маємо $3\sin(\pi + 2\pi n) - 4\cos(\pi + 2\pi n) \neq 5$; отже, числа $x = \pi + 2\pi n$ не є розв'язками рівняння (*).

Таким чином, дістаємо відповідь: $x = 2\,\mathrm{arctg}\,3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ (a — задане число).

△ Перетворимо ліву частину рівняння за формулою (2.13) як суму кубів:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) =$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x) - 3\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Згідно з формулою (3.13), маємо $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Тоді дістанемо рівняння $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a$, рівносильне початковому, звідки $\sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3}$. Якщо $0 \leqslant \frac{4(1-a)}{3} < 1$, тобто $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$, то рівняння $\sin 2x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}$ має розв'язок

$$x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}\right) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \ ▲$$

Зокрема, при $a = 1$ розв'язками рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ є числа $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$. Проте це рівняння, як і багато інших, можна розв'язати швидше, використовуючи нерівності $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ (див. приклади 8 і 9).

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sin^{2k+2}x + \cos^{2k+2}x = 1$, $k \in \mathbf{N}$.

△ Легко здогадатися, що числа $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$, є розв'язками рівняння. Проте ще слід довести, що інших розв'язків немає. Припустимо, що існують розв'язки $x = \alpha \neq \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$. Оскільки $|\sin\alpha| < 1$ і $|\cos\alpha| < 1$, то $\sin^2\alpha < 1$ і $\cos^2\alpha < 1$. Тому для будь-якого цілого додатного k справедливі нерівності $\sin^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha$ і $\cos^{2k+2}\alpha < \cos^2\alpha$. Додаючи їх, дістаємо $\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. Але $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Отже, $\sin^{2k+2}x + \cos^{2k+2}x < 1$ для всіх значень $x = \alpha \neq \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$.

Таким чином, задане рівняння (зокрема рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$) не має розв'язків, відмінних від $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

△ За формулою (8.6) знаходимо $\pi\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, тобто $\cos 2x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Але $|\cos 2x| \leqslant 1$, тому $k = 0$. Маємо $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, звідки дістанемо відповідь: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

Група А

Розв'язати рівняння (8.001—8.175):

8.001. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

8.002. $7 + 4\sin x\cos x + 1{,}5(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x) = 0$.

8.003. $\frac{4\,\mathrm{ctg}\, x}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$.

8.004. $\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} + 1 = 2\,\mathrm{tg}^2 x$.

8.005. $\sin z\sin(60° - z)\sin(60° + z) = 1/8$.

8.006. $\cos^{-2} 2t - \sin^{-2} 2t = 8/3$.

8.007. $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{tg} t - 4 \sin t = 0$.
8.008. $\cos^{-1} 3t - 6 \cos 3t = 4 \sin 3t$.
8.009. $\operatorname{ctg} t - \sin t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.
8.010. $8 \cos z \cos (60^\circ - z) \cos (60^\circ + z) + 1 = 0$.

8.011. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \operatorname{ctg} 3x + \sin (\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0$.

8.012. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.

8.013. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.
8.014. $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$.
8.015. $\sin^2 2z + \sin^2 3z + \sin^2 4z + \sin^2 5z = 2$.
8.016. $\operatorname{ctg}^4 2z + \sin^{-4} 2z = 25$.
8.017. $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$.

8.018. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1) \cos^{-2} x$.

8.019. $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$.

8.020. $1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$.

8.021. $2 \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - 2 = 0$.
8.022. $2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

8.023. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right)$.

8.024. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.
8.025. $\sin (15^\circ + x) + \sin (45^\circ - x) = 1$.
8.026. $\cos^{-1} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$.
8.027. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$.
8.028. $2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

8.029. $\cos x \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 4x\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 5x\right)$.

8.030. $2 + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$.

8.031. $\sin 2x + \sin (\pi - 8x) = \sqrt{2} \cos 3x$.
8.032. $0{,}5 (\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0$.
8.033. $2 (\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$.

8.034. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x$.

8.035. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0.$
8.036. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2}\sin 3x \cos 8x.$
8.037. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x.$
8.038. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$
8.039. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3.$

8.040. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x} = 0.$

8.041. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$

8.042. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1\right) = \cos t.$

8.043. $\sin 3z - \cos 3z = \sqrt{3/2}.$
8.044. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0.$
8.045. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

8.046. $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z = \sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}.$

8.047. $\sin^3 z \cos z - \sin z \cos^3 z = \sqrt{2}/8.$

8.048. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \times$
$$\times \sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$$

8.049. $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$

8.050. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$
8.051. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2.$
8.052. $\sin 3x = 2\cos(\pi/2 - x).$
8.053. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0.$
8.054. $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0.$
8.055. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 25/16.$
8.056. $1 + \cos t + \cos 2t + \cos 3t = 0.$
8.057. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$

8.058. $1 + \cos 7x = \left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)^2.$

8.059. $2\operatorname{tg}^4 3x - 3\operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0.$
8.060. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos(7x + 3\pi/2).$
8.061. $4\operatorname{tg}^2 3x - \cos^{-2} 3x = 2.$
8.062. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0.$
8.063. $\sin 9x = 2\sin 3x.$
8.064. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0.$
8.065. $\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2}\sin 3z.$
8.066. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$
8.067. $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x).$

8.068. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \sin^{-2} x(1 + \cos 2x) = 0.$

8.069. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0.$

8.070. $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3.$

8.071. $4\sin 3z + \frac{1}{3}\cos 3z = 3.$

8.072. $(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x.$

8.073. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = 3.$

8.074. $1 - \cos(\pi + x) - \sin\frac{3\pi + x}{2} = 0.$

8.075. $9^{\cos x} = 9^{\sin x}\cdot 3^{2/\cos x}.$

8.076. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$

8.077. $2\sin z - \cos z = 2/5.$

8.078. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x.$

8.079. $(1 + \sin x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \cos^{-1} x - \cos x.$

8.080. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \cos 3x.$

8.081. $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$

8.082. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x.$

8.083. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x.$

8.084. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x).$

8.085. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1.$

8.086. $\cos 6x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right).$

8.087. $2\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3\sin(\pi - x)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = 0.$

8.088. $(\sin 4t + \cos 4t)^2 = 16\sin 2t\cos^3 2t - 8\sin 2t\cos 2t.$

8.089. $\cos(2t - 18^\circ)\operatorname{tg} 50^\circ + \sin(2t - 18^\circ) = \frac{1}{2\cos 130^\circ}.$

8.090. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{3t}{2} + \cos^{-1}\frac{t}{2}\sin^{-1}\frac{3t}{2} = 1.$

8.091. $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} t}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} t}=\sin 2t.$

8.092. $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=1/2.$

8.093. $\cos t \sin\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t.$

8.094. $\frac{1-\cos x}{\sin(x/2)}=2.$

8.095. $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0.$

8.096. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x.$

8.097. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z.$

8.098. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

8.099. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}+\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}\right)=4.$

8.100. $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x.$

8.101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

8.102. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5.$

8.103. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$

8.104. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x.$

8.105. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x.$

8.106. $\cos(3x-30^\circ)-\sin(3x-30^\circ)\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{2\cos 210^\circ}.$

8.107. $4\sin x+\cos x=4.$ 8.108. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2.$

8.109. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1.$

8.110. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x.$

8.111. $\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0.$

8.112. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2} x-3\operatorname{ctg} x-4=0.$

8.113. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=3/2.$

8.114. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\frac{3}{2}x.$

8.115. $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z.$

8.116. $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+\frac{1}{2}=0.$

8.117. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$

8.118. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t.$

8.119. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-3\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x.$

8.120. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3}{2}x-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0.$

8.121. $\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$

8.122. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$

8.123. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0.$

8.124. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\cos^{-1} 4x.$

8.125. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x).$

8.126. $\dfrac{1}{1+\cos^2 z}+\dfrac{1}{1+\sin^2 z}=\dfrac{16}{11}.$

8.127. $\dfrac{\cos x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x}=2\sqrt{3}.$

8.128. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x.$

8.129. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0.$

8.130. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$

8.131. $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(\pi/3-x).$

8.132. $\sin^2 x\cos^{-4} x-4\operatorname{tg}^2 x+3\cos^{-2} x-12=0.$

8.133. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x.$

8.134. $(\sin 2t-\sin^{-1} 2t)^2+(\cos^{-1} 2t-\cos 2t)^2=1.$

8.135. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25.$

8.136. $\sin 2z-4\cos 2z=4.$

8.137. $3+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$

8.138. $\sin^2(\pi/8+t)=\sin t+\sin^2(\pi/8-t).$

8.139. $\sin^3\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+$

$+3\cos^3\frac{x}{3}=0.$

8.140. $\operatorname{tg}(x-15^\circ)\operatorname{ctg}(x+15^\circ)=1/3.$

8.141. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1).$

8.142. $\cos(4x+2)+3\sin(2x+1)=2.$

8.143. $\cos 4x+2\cos^2 x=1.$ 8.144. $\sin^4 x+\cos^4 x=5/8.$

8.145. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x.$

8.146. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 50^\circ+\operatorname{tg} 70^\circ=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 50^\circ\operatorname{tg} 70^\circ.$

8.147. $\cos x-\sin x=4\cos x\sin^2 x.$

8.148. $\operatorname{tg} 2x\sin 2x-3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x\cos 2x=0.$

8.149. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x.$

8.150. $\sqrt{2}(1+\cos x)=\operatorname{ctg}(x/2).$

8.151. $\sin\dfrac{3x-7\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi-3x}{2}=\cos^{-1}\dfrac{3}{2}x.$

8.152. $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$.
8.153. $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

8.154. $\sin 6x + \sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

8.155. $\dfrac{2\cos(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos(\pi - x)} = \frac{3}{2}$.

8.156. $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$.

8.157. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x + 1 = 4\cos^2 x + \frac{\sin 3x}{\sin x} - 2\cos 2x$.

8.158. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} x = 1$.

8.159. $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \sin 3x$.

8.160. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 9/16$.
8.161. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.
8.162. $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

8.163. $a\cos^2 \frac{x}{2} - (a + 2b)\sin^2 \frac{x}{2} = a\cos x - b\sin x,\ b \neq 0$.

8.164. $\sin 5x = \cos 4x$. 8.165. $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$.
8.166. $25\sin^2 x + 100\cos x = 89$.
8.167. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0{,}25$.

8.168. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = 1 + \cos 4x$.
8.169. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$.
8.170. $\cos 2x + 3\sin x = 2$. 8.171. $\cos 2x = 1 - \sin 2x$.
8.172. $\operatorname{tg}(70^\circ + x) + \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 2$.

8.173. $\sin x + \sin\frac{1}{\pi} = \sin\left(x + \frac{1}{\pi}\right)$.

8.174. $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0$. 8.175. $6\operatorname{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3$.

Група Б

Розв'язати рівняння (8.176—8.385):
8.176. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$.

8.177. $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} +$
$+ \sin x = 4$.
8.178. $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x)$.

8.179. $\sin^2 x + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin x \sin^2 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0$.

8.180. $\dfrac{\cos^2 z\,(1+\operatorname{ctg} z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z.$

8.181. $\dfrac{1}{2\operatorname{ctg}^2 t+1}+\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 t+1}=\dfrac{15\cos 4t}{8+\sin^2 2t}.$

8.182. $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0.$

8.183. $\dfrac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}=\cos 4t.$

8.184. $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=1/16.$

8.185. $\dfrac{\sin^3\dfrac{x}{2}-\cos^3\dfrac{x}{2}}{2+\sin x}=\dfrac{1}{3}\cos x.$

8.186. $\operatorname{tg}^2 t-\dfrac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\operatorname{ctg} 2t.$

8.187. $\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x+2\sin x\cos x=4\sqrt{3}/3.$

8.188. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)=\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+$
$+25^\circ)\operatorname{ctg} x.$

8.189. $\dfrac{40\left(\sin^3\dfrac{t}{2}-\cos^3\dfrac{t}{2}\right)}{16\sin\dfrac{t}{2}-25\cos\dfrac{t}{2}}=\sin t.$

8.190. $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\right.$
$\left.-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right).$

8.191. $\sin^{-1} t-\sin^{-1} 2t=\sin^{-1} 4t.$

8.192. $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$

8.193. $\operatorname{ctg}^2 2x+\dfrac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0.$

8.194. $\operatorname{tg}^4 3t=\sin^2 6t.$ 8.195. $\dfrac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z.$

8.196. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\dfrac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin 2x}.$

8.197. $\dfrac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z}+\dfrac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}+2=0.$

8.198. $\cos^{-2} 2x\operatorname{tg} 2x+\sin^{-2} 2x\operatorname{ctg} 2x=\dfrac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+$
$+10\sin^{-1} 4x+4\sqrt{3}.$

8.199. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

8.200. $\dfrac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

8.201. $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3.$

8.202. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0.$

8.203. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

8.204. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1} 2t=8\sin^{-3} 2t-3\operatorname{ctg} t.$

8.205. $2\sin x\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x-$

$-5\cos^2 x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0.$

8.206. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\dfrac{82}{9}(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x.$

8.207. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

8.208. $\sin 6x+2=2\cos 4x.$

8.209. $\sin^2 t\operatorname{tg} t+\cos^2 t\operatorname{ctg} t-2\sin t\cos t=$

$=1+\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t.$

8.210. $\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{ctg}^3 2x+6\sin^{-1} 2x=8\sin^{-3} 4x.$

8.211. $\cos x\cos 2x\sin 3x=0{,}25\sin 2x.$

8.212. $\cos 9x-2\cos 6x=2.$

8.213. $2\sin^5 2t-\sin^3 2t-6\sin^2 2t+3=0.$

8.214. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=\dfrac{3}{2}(\sin^4 2t+\cos^4 2t)+\dfrac{1}{2}(\sin t+\cos t).$

8.215. $(\cos^{-2} 2x+\operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x)=$

$=4\sin^{-2} 4x+5.$

8.216. $\sin 3z+\sin^3 z=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

8.217. $(\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2)(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0.$

8.218. $2\sin 2x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)-\cos 3x\cos^{-1} 5x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\right.$

$\left.-5x\right)=0.$

8.219. $3\operatorname{ctg} t-3\operatorname{tg} t+4\sin 2t=0.$

8.220. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x+\cos^{-2} 2x}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x+\sin^{-2} 2x}=\dfrac{2}{3}.$

8.221. $\operatorname{tg} 3t+\operatorname{tg} t=2\sin 4t.$

8.222. $\sin(3\pi-x)+\operatorname{tg}(\pi+x)=\dfrac{\cos^{-1} x-\cos x}{2\sin x}.$

8.223. $\frac{1}{2}\sin 4x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x.$

8.224. $\frac{2(\cos^4 t+\sin^4 t)}{\cos^4 t-\sin^4 t}=\cos^{-1}2t+\cos 4t+1.$

8.225. $\operatorname{tg} t=\frac{\sin^2 t+\sin 2t-1}{\cos^2 t-\sin 2t+1}.$

8.226. $\frac{\sin 2t+2\cos^2 t-1}{\cos t-\cos 3t+\sin 3t-\sin t}=\cos t.$

8.227. $\sin t^2-\sin t=0.$

8.228. $\sin^3 z\sin 3z+\cos^3 z\cos 3z=\cos^3 4z.$

8.229. $2\sin^4 t(\sin 2t-3)-2\sin^2 t(\sin 2t-3)-1=0.$

8.230. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$

8.231. $2\sin^4 x+1{,}25\sin^2 2x-\cos^4 x=\cos 2x.$

8.232. $\sin 2t\cos 2t(\sin^4 2t+\cos^4 2t-1)=\frac{1}{2}\sin^2 4t.$

8.233. $\sin 2x-2\cos^2 x+4(\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x-1)=0.$

8.234. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x.$

8.235. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^3 2x+1.$

8.236. $\frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}-6\cos^{-1}x=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

8.237. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0.$

8.238. $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\frac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

8.239. $3\sin^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\times$

$\times\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}.$

8.240. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

8.241. $\operatorname{tg}^3 z+\operatorname{ctg}^3 z-8\sin^{-3}2z=12.$

8.242. $\frac{1}{\operatorname{tg} 5x+\operatorname{tg} 2x}-\frac{1}{\operatorname{ctg} 5x+\operatorname{ctg} 2x}=\operatorname{tg} 3x.$

8.243. $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}+4\cos^{-1}2z=\frac{4\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}-1}.$

8.244. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^2 2x-1.$

8.245. $\dfrac{4\sin^2\frac{t}{2}-1}{\cos t}=\operatorname{tg} t\,(1-2\cos t).$

8.246. $3\sin^2 z\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\frac{1}{2}\sin^2 2z-5\cos^4 z+$
$$+2\cos 2z=0.$$

8.247. $\dfrac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t}+\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t}=0.$

8.248. $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\sin^{-1} t-1.$

8.249. $\dfrac{\cos^4 2x+\sin^4 2x}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}-\dfrac{1}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1} 4x.$

8.250. $\cos^{-4} z=\dfrac{160}{9}-2\sin^{-2} z\,(\operatorname{ctg} 2z\operatorname{ctg} z+1).$

8.251. $\cos^{-3} t\sin^{-3} t-\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{ctg}^3 t=2\sqrt{3}\cos^{-1} 2t.$

8.252. $(\sin x-\cos x)^2+\operatorname{tg} x=2\sin^2 x.$

8.253. $\sin 3t-\sin t=\dfrac{8\cos t\operatorname{ctg} 2t}{4-\sin^{-2} t}.$

8.254. $\sin^3 2x\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)+3\sin 2x\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+$
$$+2\cos^3 2x=0.$$

8.255. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1.$

8.256. $\dfrac{4\sin^4 z}{(1+\cos 2z)^2}-2\cos^{-2} z-1=0.$

8.257. $\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{z}{2}-2=4\operatorname{tg} z.$

8.258. $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\sqrt{2}/4.$

8.259. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin^2 x-2\sin^2(\pi/4-x)}{\cos^2 x+2\cos^2(\pi/4+x)}.$

8.260. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3z+\operatorname{tg} 4z}+\operatorname{ctg}^2 7z=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3z+\operatorname{ctg} 4z}.$

8.261. $(2\cos 2t+5)\cos^4 t-(2\cos 2t+5)\sin^4 t=3.$

8.262. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg}(z+60^\circ)\operatorname{tg}(z+120^\circ)=\sqrt{3}.$

8.263. $\cos 3x+\cos\dfrac{5x}{2}=2.$

8.264. $1-\dfrac{2(\cos 2t-\operatorname{tg} t\sin 2t)}{\cos^{-2} t}=\sin^4 t-\cos^4 t.$

8.265. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x.$

8.266. $\cos^3 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x \sin^3 x + 4 \sin x + 4 = 0.$

8.267. $\frac{2(\cos^3 x + 2\sin^3 x)}{2\sin x + 3\cos x} = \sin 2x.$

8.268. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\sin x.$

8.269. $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 1.$

8.270. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0.$

8.271. $\sin 2z + 5(\sin z + \cos z) + 1 = 0.$

8.272. $\sin^3 2t + \cos^3 2t + \frac{1}{2}\sin 4t = 1.$

8.273. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg} 2z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} 2z.$

8.274. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x.$

8.275. $\frac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t} = 0.$ 8.276. $\operatorname{tg}^4 x = 36\cos^2 2x.$

8.277. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0.$

8.278. $4\sin^3 x \cos 3x + 4\cos^3 x \sin 3x = 3\sin 2x.$

8.279. $2\cos z \sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) - 5\sin^2 z \cos^2 z +$

$$+ \sin z \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) = \cos 2z.$$

8.280. $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x = 0.$

8.281. $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5.$

8.282. $5\sin^4 2z - 4\sin^2 2z\cos^2 2z - \cos^4 2z + 4\cos 4z = 0.$

8.283. $1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 5x - \sqrt{2}\operatorname{tg} 2x \cos 3x \cos^{-1} 5x = 0.$

8.284. $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = 1/16.$

8.285. $\frac{1}{\sin^2 2x} + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4 = 0.$

8.286. $\operatorname{tg} 5z - \operatorname{tg} 3z - 2\operatorname{tg} 2z = 0.$

8.287. $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0.$

8.288. $(\operatorname{ctg} z - 1)(1 + \sin 2z) = 1 + \operatorname{ctg} z.$

8.289. $\operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \sin 6x.$

8.290. $\sin^4 3t + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} + 3t\right) = \frac{1}{4}$.

8.291. $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x =$
$= \cos x + 8\cos x \cos^3 3x$.

8.292. $1 + \sin\frac{t}{2}\sin t - \cos\frac{t}{2}\sin^2 t = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$.

8.293. $\dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)}{\cos^2 x} + 2\,\mathrm{tg}\,x = 0$.

8.294. $\dfrac{4\cos^2 t - 1}{\sin t} = \mathrm{ctg}\,t\,(1 + 2\cos 2t)$.

8.295. $(\sin x + \cos x)^4 = 2(1 + \sin^2 x) - (\sin x - \cos x)^4$.

8.296. $\cos^{-4} z = 64\cos^2 2z$.

8.297. $4\sin 5x \cos 5x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin 4x$.

8.298. $\dfrac{\mathrm{tg}\,4z}{\mathrm{tg}\,2z} + \dfrac{\mathrm{tg}\,2z}{\mathrm{tg}\,4z} + \dfrac{5}{2} = 0$.

8.299. $\dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x} = 6\cos 2x + 4\sin 2x$.

8.300. $\mathrm{tg}\,5x - 2\,\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}^2 3x\,\mathrm{tg}\,5x$.

8.301. $\cos z + \sin z = \sqrt{1 - 2\cos^2 z}$.

8.302. $\sqrt{3}(1 + \mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,3x) = \mathrm{tg}\,2x\cos^{-1} 3x$.

8.303. $\left(\cos^{-6} z - \mathrm{tg}^6 z - \frac{7}{3}\right)(\sin z + \cos z + 2) = 0$.

8.304. $\mathrm{tg}\,2x - \mathrm{ctg}\,3x + \mathrm{ctg}\,5x = 0$.

8.305. $\cos^{-1} 2t + \sin^{-1} 2t + \cos^{-1} 2t\sin^{-1} 2t - 5 = 0$.

8.306. $\cos(22^\circ - t)\cos(82^\circ - t) + \cos(112^\circ - t)\cos(172^\circ - t) =$
$= \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$.

8.307. $\sin 4x(3\sin 4x - 2\cos 4x) =$
$= \sin^2 2x - 16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x + \cos^2 2x$.

8.308. $\cos 3z - \cos^3 z + \frac{3}{4}\sin 2z = 0$.

8.309. $\mathrm{tg}(t^2 - t)\,\mathrm{ctg}\,2 = 1$.

8.310. $\sin^3 x(1 - \mathrm{ctg}\,x) + \cos^3 x(1 - \mathrm{tg}\,x) = 1{,}5\cos 2x$.

8.311. $\dfrac{\cos^2(\pi/2 - 2t)}{1 + \cos 2t} = \cos^{-2} 2t - 1$.

8.312. $4\cos x\cos 2x\cos 3x = \cos 6x$.

8.313. $1 - \cos x = \sqrt{1 - \sqrt{4\cos^2 x - 7\cos^4 x}}$.

8.314. $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} + \mathrm{ctg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{10}{3}$.

8.315. $4(\sin t\cos^5 t + \cos t\sin^5 t) + \sin^3 2t = 1$.

8.316. $\sin^4 x - \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0.$

8.317. $\dfrac{\sin^2 t - \mathrm{tg}^2 t}{\cos^2 t - \mathrm{ctg}^2 t} + 2\,\mathrm{tg}^3 t + 1 = 0.$

8.318. $\dfrac{\mathrm{tg}\, t}{\cos^2 5t} - \dfrac{\mathrm{tg}\, 5t}{\cos^2 t} = 0.$

8.319. $\dfrac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} + \sin x \left(1 + \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}\right) = 4.$

8.320. $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0.$

8.321. $\sin^2(t + 45^\circ) - \sin^2(t - 30^\circ) - \sin 15^\circ \cos(2t + 15^\circ) = 0{,}5 \sin 6t.$

8.322. $3\,\mathrm{tg}\, 3x - 4\,\mathrm{tg}\, 2x = \mathrm{tg}^2 2x\, \mathrm{tg}\, 3x.$

8.323. $\dfrac{5 \sin x - 5\,\mathrm{tg}\, x}{\sin x + \mathrm{tg}\, x} + 4(1 - \cos x) = 0.$

8.324. $4 \cos x = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x + 1.$

8.325. $1 + \dfrac{2(\cos 2z\, \mathrm{tg}\, z - \sin 2z)}{\cos^{-2} z} = \cos 2z.$

8.326. $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0{,}5 \sin 4x.$

8.327. $\mathrm{ctg}\, x \left(1 - \dfrac{1}{2} \cos 2x\right) = 1.$

8.328. $\cos^2(x + 40^\circ) + \cos^2(x - 40^\circ) - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x.$

8.329. $2 \cos^2 \dfrac{x}{2} (1 - \sin x) + \cos^2 x = 0.$

8.330. $\mathrm{tg}\, 6x \cos 2x - \sin 2x - 2 \sin 4x = 0.$

8.331. $\cos 8x + 3 \cos 4x + 3 \cos 2x = 8 \cos x \cos^3 3x - 0{,}5.$

8.332. $\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}(x + 1) = 1.$

8.333. $\dfrac{8 \sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \mathrm{tg}^2 x} = \mathrm{ctg}^2 x + \dfrac{4}{3}.$

8.334. $2 + \sin t = 3\,\mathrm{tg}\, \dfrac{t}{2}.$

8.335. $\mathrm{tg}(35^\circ + x)\, \mathrm{ctg}(10^\circ - x) = 2/3.$

8.336. $2\,\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 2x + 2\,\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, 3x + \mathrm{tg}\, 2x\, \mathrm{tg}\, 3x = 0.$

8.337. $\sin^4 2x + \sin^3 2x \cos 2x - 8 \sin 2x \cos^3 2x - 8 \cos^4 2x = 0.$

8.338. $\cos t\, (1 - \mathrm{tg}\, t)(\sin t + \cos t) = \sin t.$

8.339. $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} - \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}} = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}.$

8.340. $1 + \sin z + \cos z + \sin 2z + \cos 2z = 0.$

8.341. $\mathrm{ctg}(x - 25^\circ) + \mathrm{tg}(3x + 15^\circ) = 2 \sin(2x - 50^\circ).$

8.342. $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x + 3\,\mathrm{ctg}\, x + 4 = 0.$

8.343. $\operatorname{tg} 2t = \operatorname{ctg} t - 4 \cos t \cos 3t$.

8.344. $\cos 2x = \cos^2 \frac{3x}{2}$.

8.345. $(\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t + 2 \operatorname{tg} 2t)(1 + \cos 3t) = 4 \sin 3t$.

8.346. $\sin x (\cos x - 2) + \operatorname{tg} x = 2 - \cos x - \cos^{-1} x$.

8.347. $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2 \cos x$.

8.348. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

8.349. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x = 106/9$.

8.350. $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0$.

8.351. $3\sqrt{3} \operatorname{tg} x \sin x - \operatorname{ctg} x \cos x + 9 \sin x - 3\sqrt{3} \cos x = 0$.

8.352. $\cos 2x - \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - 1$.

8.353. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.

8.354. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \dfrac{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)}{1 + \cos x} = 2$.

8.355. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$.

8.356. $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = (\sin 2x + \sin 4x) \cos^{-1} x \sin^{-1} 3x$.

8.357. $4 \sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x$.

8.358. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

8.359. $37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

8.360. $\sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \cos 2x + \sin 2x$.

8.361. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \sin^{-1} x - \cos^{-1} x$.

8.362. $\sin^6 x + \cos^6 x = 7/16$.

8.363. $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2 \cos x (\cos x - 1)$.

8.364. $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos x + \sin x)$.

8.365. $2(1 + \sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

8.366. $\dfrac{1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 2x} = 0$.

8.367. $\dfrac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t} - \dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t} =$

8.368. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

8.369. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$.

8.370. $\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{2}} = 2$.

8.371. $\sin 3x = a \sin x$. **8.372.** $\cos 3x = m \cos x$.

8.373. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha + 1 = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha$.

8.374. $12 \sin x + 4\sqrt{3} \cos(\pi + x) = m\sqrt{3}$.

8.375. $\sin\left(x + \frac{5}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) = \cos \alpha$.

8.376. $2^{2 \operatorname{tg}(x/2) - \cos x} = 4$. **8.377.** $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$.

8.378. $3^{1 + \sin x + \ldots + \sin^n x + \ldots} = \sqrt[3]{9}$.

8.379. $2^{-1 + \cos x - \cos^2 x + \ldots + (-1)^{n-1} \cos^n x + \ldots} = \sqrt[3]{0,25}$.

8.380. $9^{1 - \cos 6x} = 3^{1/\operatorname{ctg} 3x}$. **8.381.** $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

8.382. $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos^{-1} x}$.

8.383. $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1$. **8.384.** $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.

8.385. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$.

8.386. Дано $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$. Знайти $x + y$.

8.387. Показати, що рівняння

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$$

не має коренів.

8.388. Один із кутів прямокутного трикутника задовольняє рівняння $\sin^3 x + \sin x \sin 2x - 3 \cos^3 x = 0$. Показати, що трикутник рівнобедрений.

8.389. Показати, що не існує трикутника, у якого кожний кут задовольняв би рівняння

$$(3 \cos x - 2)(14 \sin^2 x + \sin 2x - 12) = 0.$$

8.390. Показати, що існує трикутник, у якого кожний кут задовольняє рівняння

$$(65 \sin x - 56)(80 - 64 \sin x - 65 \cos^2 x) = 0.$$

Знайти ці кути.

8.391. Показати, що трикутник, кожний із кутів якого задовольняє рівняння $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}(x/2) - 2\sqrt{3} = 0$, є рівностороннім.

8.392. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$, $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2,\ 0 < \beta < \pi/2,\ 0 < \gamma < \pi/2)$.

8.393. Знайти кути α, β і γ першої чверті, коли відомо, що вони утворюють арифметичну прогресію з різницею $\pi/12$, а їхні тангенси утворюють геометричну прогресію.

Розв'язати системи рівнянь (**8.394—8.405**):

8.394. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1/2. \end{cases}$ **8.395.** $\begin{cases} 9^{2 \operatorname{tg} x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$

8.396. $\begin{cases} x - y = 5\pi/3, \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$ **8.397.** $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25, \\ \sin y \cos x = 0,75. \end{cases}$

8.398. $\begin{cases} x - y = -1/3, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = 1/2. \end{cases}$

8.399. $\begin{cases} x + y = \pi/4, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1/6. \end{cases}$ **8.400.** $\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$

8.401. $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -1{,}8. \end{cases}$

8.402. $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\cos^{-1} y} = 5, \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^{-1} y} = 4. \end{cases}$ 8.403. $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

8.404. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25, \\ x + y = 5\pi/6. \end{cases}$

8.405. $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}25, \\ x + y = \pi/3. \end{cases}$

Група В

Розв'язати рівняння (8.406—8.492):

8.406. $(\cos^2 x + \cos^{-2} x)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4.$

8.407. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \cdots + \operatorname{tg}^n x + \cdots}{1 - \operatorname{tg} x + \cdots + (-1)^n \operatorname{tg}^n x + \cdots} = 1 + \sin 2x,$

$|\operatorname{tg} x| < 1.$

8.408. $\operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x\,(1 - 2\cos^{-1} x) = 0.$

8.409. $\dfrac{1 - \sin t + \cdots + (-1)^n \sin^n t + \cdots}{1 + \sin t + \cdots + \sin^n t + \cdots} = \dfrac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t},$

$|\sin t| \neq 1.$

8.410. $\sqrt{3}\sin t - \sqrt{2\sin^2 t - \sin 2t + 3\cos^2 t} = 0.$

8.411. $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{4}.$

8.412. $2\sin^2 t = \sqrt{\sin^2 t - 16\sin^2 t \cos^2 t \cos^2 2t + \cos^2 t}.$

8.413. $\cos z \sqrt{\operatorname{tg}^2 z - \sin^2 z} + \sin z \sqrt{\operatorname{ctg}^2 z - \cos^2 z} = 2\sin z.$

8.414. $\cos x + \sqrt{3/2 - \cos^2 x} - \cos x \sqrt{3/2 - \cos^2 x} = 1.$

8.415. $\sqrt[5]{1/2 - \sin x} + \sqrt[5]{1/2 + \sin x} = 1.$

8.416. $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 1 + \cos x.$

8.417. $\sqrt{1 + 3\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg} x}} = \dfrac{5}{2}.$

8.418. $\sqrt[4]{1/2 - \cos 2x} + \sqrt[4]{1/2 + \cos 2x} = 1.$

8.419. $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3.$

8.420. $2 - \sin x = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}.$

8.421. $\sqrt[3]{2 - \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{7 + \operatorname{tg} x} = 3.$

8.422. $\sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3} = 4.$

8.423. $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x}.$

8.424. $\cos x + \sqrt{\sin^2 x - 2\sin 2x + 4\cos^2 x} = 0.$

8.425. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}.$

8.426. $\dfrac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}^3 4x=3.$

8.427. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1.$

8.428. $\sin^{-1}2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+2}+\operatorname{ctg}2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-2}=4\cos^2 2x.$

8.429. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0.$

8.430. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0.$

8.431. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0.$

8.432. $4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-14=0.$

8.433. $\cos^{-4}x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x.$

8.434. $\cos^{-4}x+8\cos^{-1}x-7=0.$

8.435. $\sin^{10}3x+\cos^{10}3x=4\dfrac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}.$

8.436. $\operatorname{ctg}^4 2z=\cos^2 4z+1.$

8.437. $\left(2+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x)=1+5\sin 3y.$

8.438. $\cos(x-\pi/4)(1-4\cos^2 2x)-2\cos 4x=3.$

8.439. $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1}x)+2\cos^{-2}x+5=0.$

8.440. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg}t)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg}t).$

8.441. $\cos^{-4}x-2\cos^{-2}x-12\operatorname{tg}x-16=0.$

8.442. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=41/128.$

8.443. $2(1-\sin x-\cos x)+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=0.$

8.444. $\dfrac{\operatorname{tg}t}{2-\cos^{-2}t}(\sin 3t-\sin t)=\dfrac{2}{\operatorname{ctg}^2 t-3}.$

8.445. $\operatorname{tg}(\pi\cos t)=\operatorname{ctg}(\pi\sin t).$ 8.446. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-\cos 4x=3.$

8.447. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}^2 5x=\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}^2 3x-\operatorname{tg}^2 5x.$

8.448. $(5+3\sin^{-2}x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y.$

8.449. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-3\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg}x-2=0.$

8.450. $\cos^4 x+4\cos x-1=0.$

8.451. $\dfrac{1-\cos 2x+\dots+(-1)^n\cos^n 2x+\dots}{1+\cos 2x+\dots+\cos^n 2x+\dots}=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x,$
$|\cos 2x|\neq 1.$

8.452. $2(\operatorname{tg}x-\sin x)+3(\operatorname{ctg}x-\cos x)+5=0.$

8.453. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x-4=0.$

8.454. $\cos\sqrt{x}=\cos x.$ 8.455. $|\sin t+\cos t|=\sqrt{2}.$

8.456. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg}4x.$

8.457. $\cos 6x+\sin\dfrac{5x}{2}=2.$ 8.458. $\sqrt{3}\,|\cos t|=1+\operatorname{ctg}t.$

8.459. $\cos^2 x^2(\operatorname{tg}x^2+2\operatorname{tg}x)+\operatorname{tg}^3 x(1-\sin^2 x^2)(2-\operatorname{tg}x\times\operatorname{tg}x^2)=0.$

8.460. $\dfrac{1-\operatorname{tg}x+\dots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\dots}{1+\operatorname{tg}x+\dots+\operatorname{tg}^n x+\dots}=1+\sin 2x,$
$|\operatorname{tg}x|<1.$

8.461. $(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)^2-\cos(x+4\operatorname{tg}x)=-1.$

8.462. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 2x \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x.$

8.463. $(4 - \cos 2x)(2 + 3 \sin y) = 12 + 13 \cos^{-2} 3z.$

8.464. $(2 \sin x - 1)(\cos^4 x + 2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1) = 0.$

8.465. $1 + \sqrt{3}(1 + \cos x) = \cos 2(x + 2 \operatorname{tg} x).$

8.466. $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 3x.$

8.467. $2 \sin^2 x + \sin x + \sin^{-1} x + 2 \sin^{-2} x = 6.$

8.468. $2 \operatorname{tg} \pi t^2 - \operatorname{tg} \pi t + \operatorname{tg} \pi t \operatorname{tg}^2 \pi t^2 = 0.$

8.469. $\sin^4 x + 2 \cos^3 x + 2 \sin^2 x - \cos x + 1 = 0.$

8.470. $|\sin t| + |\cos t| = 1{,}4.$

8.471. $\dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{2 - \cos^{-2} x} = \dfrac{4 + 2 \cos \frac{6}{5} x}{\cos 3x + \cos x}.$

8.472. $12 \cos^{-2} x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 x + 10 \left(2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{ctg} x}{3}\right) = 1.$

8.473. $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x.$

8.474. $3 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x.$

8.475. $\operatorname{ctg} 2\pi t^2 + \operatorname{ctg} 4\pi t = 0.$

8.476. $(3 - \operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x + \cos x) = \dfrac{4 \cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$

8.477. $$\frac{1 + \sin t + \cdots + \sin^n t + \cdots}{1 - \sin t + \cdots + (-1)^n \sin^n t + \cdots} = \frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad |\sin t| \neq 1.$$

8.478. $|\operatorname{tg} 2t + \operatorname{ctg} 2t| = 4\sqrt{3}/3.$

8.479. $(3 - \sin x)(4 - \sin^{-2} x) = 12 + \cos^2 y.$

8.480. $4 - 4(\cos z - \sin z) - \sin 2z = 0.$

8.481. $\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{t}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \operatorname{tg} t = 2\sqrt{3} + \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{t}{4}.$

8.482. $\dfrac{3 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}(\cos 3t + \cos t) = 2 \sin 5t.$

8.483. $\operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x + 2(2 \cos x - \cos^{-1} x) = 0.$

8.484. $5 \sin 2z - 11(\sin z + \cos z) + 7 = 0.$

8.485. $\sin^{-1} 5x - \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

8.486. $4 \cos^2 2t - \operatorname{tg} 4t = \operatorname{ctg} 2t.$

8.487. $\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{tg}^6 x + \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x = 0.$

8.488. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 29/64.$

8.489. $(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 = 5 + \cos(\pi/3 + 4x).$

8.490. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 6.$

8.491. $\log_{0,5 \sin 2x} \sin x = 1/2.$

8.492. $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = 1/4.$

8.493. Показати, що рівняння $2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$ не має коренів.

Розв'язати системи рівнянь (8.494—8.499):

8.494. $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y, \end{cases}$ 8.495. $\begin{cases} 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$

8.496. $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.497. $\begin{cases} \cos x - \cos y = \sin (x + y), \\ |x| + |y| = \pi/4. \end{cases}$

8.498. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin (y - 3\pi/4), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2 \sin (x + \pi/4). \end{cases}$

8.499. $\begin{cases} 2 \cos x = 3 \operatorname{tg} y, \\ 2 \cos y = 3 \operatorname{tg} z, \\ 2 \cos z = 3 \operatorname{tg} x. \end{cases}$

8.500. Знайти x, y, z, якщо $\dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{\sin y}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin z}{2}$, $x + y + z = \pi$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Глава 9

НЕРІВНОСТІ

Вказівки до розв'язування нерівностей з однією змінною

1°. Нерівності з однією змінною мають вигляд:

$$f(x) > g(x), \quad f(x) < g(x), \quad f(x) \geqslant g(x), \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Розв'язком нерівності називається множина значень змінної, при яких дана нерівність буде правильною числовою нерівністю.

Дві нерівності називаються *рівносильними*, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.

Основна ідея розв'язування нерівності полягає в заміні нерівності більш простою, але рівносильною заданій.

2°. При розв'язуванні нерівності використовують такі правила перетворення нерівності в рівносильну:

а) будь-який член нерівності можна перенести з однієї її частини в іншу з протилежним знаком, залишивши при цьому без зміни знак нерівності;

б) обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме додатне число, залишивши при цьому без зміни знак нерівності;

в) обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний;

г) якщо для одних і тих самих значень x справедливі нерівності $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ і $f(x) > g(x)$, то для тих самих значень x виконується нерівність $(f(x))^n > (g(x))^n$, $n \in \mathbf{N}$.

3⁰. Нехай задана нерівність має вигляд $f(x)/g(x) > 0$ (замість знака $>$ можуть бути знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, а функція в знаменнику може бути сталою) або вона приведена до цього вигляду за допомогою правил вказівки 2⁰.

Для розв'язування нерівності застосовується метод інтервалів (метод проміжків), який полягає в тому, що:

а) на числову вісь наносять точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що розбивають її на проміжки, в яких вираз $f(x)/g(x)$ визначено і зберігає знак (плюс або мінус). Такими точками можуть бути корені рівнянь $f(x) = 0$ і $g(x) = 0$. Відповідні цим кореням точки позначають на числовій осі: зафарбованими кружками — точки, що задовольняють задану нерівність, а світлими кружками — точки, що не задовольняють її;

б) відшукують і позначають на числовій осі знак виразу $f(x)/g(x)$ для значень x, які належать кожному з одержаних проміжків. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами і не містять множників виду $(x - a)^{2n}$, де $n \in \mathbf{N}$, то достатньо визначити знак функції $f(x)/g(x)$ в будь-якому такому проміжку, а в решті проміжків знаки плюс і мінус будуть чергуватися.

Якщо ж у чисельнику і знаменнику дробу $f(x)/g(x)$ є множник виду $(x - a)^{2n}$, де $n \in \mathbf{N}$, то, покладаючи $x \neq a$, ділять обидві частини заданої нерівності на множник $(x - a)^{2n}$, додатний при всіх значеннях $x \neq a$ (див. вказівку 2⁰), і безпосередньою перевіркою з'ясовують, чи задовольняє значення $x = a$ задану нерівність.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5} > 0$.

Δ Коренями рівнянь $(x + 3)(5 - x) = 0$ і $2x - 5 = 0$ є числа $x_1 = -3$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 5$, які не являються розв'язками заданої нерівності, тому на числовій осі позначаємо їх світлими кружками (рис. 9.1). Ці точки розбивають числову вісь на чотири проміжки. Легко визначаємо, що при $x > 5$ ліва частина нерівності від'ємна — ставимо знак мінус праворуч від точки 5 і, рухаючись вліво, чергуємо знаки плюс і мінус. При цьому зміну знаків зручно ілюструвати за допомогою хвилеподібної кривої (кривої знаків), проведеної через помічені точки і розміщеної вище або нижче від числової осі в відповідності із знаком нерівності в розглядуваному проміжку. За допомогою рис. 9.1 дістаємо відповідь: $(-\infty; -3) \cup (2{,}5; 5)$. ▲

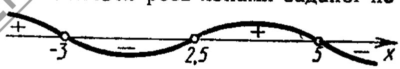

Рис. 9.1

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \leqslant 0.$$

Δ Покладаючи $x \neq 0$ і $x \neq 3$, поділимо обидві частини нерівності на додатний дріб $\dfrac{x^2}{(2x-6)^4}$ і зразу помічаємо, що $x = 0$ задовольняє задану нерівність, а $x = 3$ не задовольняє. Крім того, множники з непарними показниками степеня замінимо відповідними множниками першого степеня (ясно, що при цьому знак виразу в лівій частині нерівності не зміниться). У результаті дістанемо більш просту нерівність, рівносильну заданій для всіх $x \neq 0$ і $x \neq 3$:

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{x+4} \leqslant 0.$$

Накресливши криву знаків, заштрихуємо проміжки, що задовольняють цю нерівність, і позначимо на тій самій осі точки $x = 0$ і $x = 3$ (рис. 9.2). Враховуючи, що значення $x = 0$ є розв'язком заданої нерівності, але не належить заштрихованому проміжку, його слід додатково включити у відповідь. Значення $x = 3$ не є розв'язком нерівності, але належить заштрихованому проміжку; отже, це значення треба виключити. Таким чином, дістаємо відповідь: $(-\infty; -4) \cup [1; 3) \cup (3; 4{,}5] \cup 0$. ▲

Рис. 9.2

4⁰. Розглянемо розв'язування квадратної нерівності

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (9.1)$$

у випадку від'ємного дискримінанта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ $(D = b^2 - 4ac < 0)$.

Якщо $a > 0$, то нерівність (9.1) виконується при всіх значеннях x; якщо ж $a < 0$, то нерівність не виконується ні при якому значенні x.

5⁰. Ірраціональна нерівність

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \qquad (9.2)$$

рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases} \qquad (9.3)$$

6⁰. Ірраціональна нерівність

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \qquad (9.4)$$

рівносильна сукупності двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \qquad (9.5)$$

7⁰. Показникова нерівність

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \qquad (9.6)$$

при $a > 1$ рівносильна нерівності

$$f(x) > g(x), \qquad (9.7)$$

а при $0 < a < 1$ — нерівності

$$f(x) < g(x). \qquad (9.8)$$

8⁰. Логарифмічна нерівність

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad (9.9)$$

при $a > 1$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \qquad (9.10)$$

а при $0 < a < 1$ — системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \qquad (9.11)$$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

△ Перетворимо дану нерівність у рівносильну:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{2} \leqslant 0, \quad \frac{x^2 - 5x + 4}{2(x^2 - 5x + 6)} \geqslant 0.$$

Корені $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ рівняння $x^2 - 5x + 4 = 0$ є розв'язками нерівності (на рис. 9.3 позначаємо їх зафарбованими кружками); корені $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ не є розв'язками нерівності (на рис. 9.3 позначаємо їх світлими кружками). За допомогою кривої знаків (рис. 9.3) дістаємо відповідь: $(-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup [4; \infty)$. ▲

Рис. 9.3

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 2} > 0$.

△ Враховуючи, що x не може набувати від'ємних значень, розіб'ємо точками $x_1 = 2$ (корінь рівняння $x - 2 = 0$) і $x_2 = 9$ (корінь рівняння $\sqrt{x} - 3 = 0$) на проміжки не всю числову вісь, а тільки її частину $[0; \infty)$. За допомогою кривої знаків (рис. 9.4) дістаємо відповідь: $[0; 2) \cup (9; \infty)$. ▲

Рис. 9.4

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{x + 61} < x + 5$.

△ Згідно з вказівкою 5^0, ця ірраціональна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x + 61 \geqslant 0, \\ x + 5 > 0, \\ x + 61 < x^2 + 10x + 25, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x > -61, \\ x > -5, \\ x^2 + 9x - 36 > 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x > -5, \\ x^2 + 9x - 36 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння $x^2 + 9x - 36 = 0$, знаходимо $x_1 = -12$, $x_2 = 3$. Будуємо криву знаків (у даному випадку — дугу параболи) і стрілкою, напрямленою вправо від точки -5, позначаємо

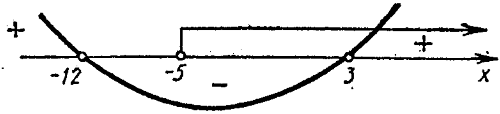

Рис. 9.5

проміжок $x > -5$ (рис. 9.5). Розв'язки першої і другої нерівностей системи збігаються на проміжку $(3;\ \infty)$. Отже, дістаємо відповідь: $(3;\ \infty)$. ▲

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x - 3 < \sqrt{x-2}$.

△ Згідно з вказівкою 6^0, ця ірраціональна нерівність рівносильна такій сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0, \\ x^2-6x+9 < x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant 3, \\ x^2-7x+11 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 3. \end{cases}$$

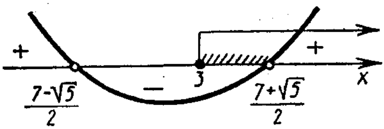

Рис. 9.6

Рис. 9.7

Розв'язком першої системи є проміжок $3 \leqslant x < (7+\sqrt{5})/2$ (рис. 9.6), а розв'язком другої системи — проміжок $2 \leqslant x < 3$ (рис. 9.7). Об'єднуючи ці розв'язки, дістаємо відповідь: $2 \leqslant x < (7+\sqrt{5})/2$. ▲

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\dfrac{(1/3)^{8+x} - 81}{x^2+2x+5} < 0$.

△ Оскільки вираз x^2+2x+5 додатний при будь-яких x, то, помноживши на нього обидві частини даної нерівності, дістанемо рівносильну нерівність

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81 < 0, \quad \text{або} \quad 3^{-(8+x)} < 3^4.$$

Далі, оскільки основа $3 > 1$, то, використовуючи вказівку 7^0, маємо $-8-x < 4$, звідки $x > -12$. Таким чином, дістаємо відповідь: $(-12;\ \infty)$. ▲

Приклад 8. Розв'язати нерівність $0{,}4^{\log_2^2 x+1} < 6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

△ Помітивши, що $0{,}4 = 2/5$ і $6{,}25 = (2/5)^{-2}$, зведемо ліву і праву частини нерівності до однієї основи:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{2\log_2 x^3-4}.$$

Оскільки $0 < 2/5 < 1$, то, використовуючи вказівку 7^0, маємо $\log_2^2 x + 1 > 2\log_2 x^3 - 4$. Функція $f(x) = \log_2 x$ визначена при $x > 0$; отже, $2\log_2 x^3 = 6\log_2 x$. Покладаючи $y = \log_2 x$, дістаємо нерівність $y^2 - 6y + 5 > 0$. Рівняння $y^2 - 6y + 5 = 0$ має корені $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Далі, за допомогою рис. 9.8 установлюємо, що $y < 1$ і $y > 5$.

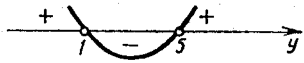

Рис. 9.8

Таким чином, дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\log_2 x < 1$, $\log_2 x > 5$, яку можна переписати у вигляді $\log_2 x < \log_2 2$, $\log_2 x > \log_2 2^5$. Оскільки основа логарифма $2 > 1$, то, використовуючи вказівку 8^0, знаходимо, що розв'язком першої нерівності є проміжок $0 < x < 2$, а другої — проміжок $x > 2^5$, тобто $x > 32$. Отже, дістаємо відповідь: $(0; 2) \cup (32; \infty)$. ▲

Приклад 9. Розв'язати нерівність $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$.

△ Зведемо нерівність до вигляду $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > x^0$ і розглянемо два випадки: $0 < x < 1$ і $1 < x < 3$, $3 < x < \infty$. Згідно з вказівкою 7^0, розв'язуємо сукупність систем нерівностей:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{2x-1}{3-x} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < x < 3, \quad 3 < x < \infty, \\ \dfrac{2x-1}{3-x} > 0. \end{cases}$$

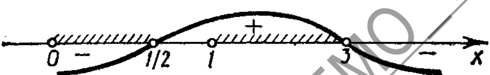

Рис. 9.9

Застосовуємо метод інтервалів зразу до обох систем (рис. 9.9). За допомогою рисунка, враховуючи знак дробової нерівності (<0 у першому випадку і > 0 у другому), дістаємо відповідь: $(0; 1/2) \cup (1; 3)$. ▲

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} \log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} < 0$.

△ Згідно з формулою (7.3), маємо $0 = \log_{1/3} 1$. Оскільки основа логарифма $0 < 1/3 < 1$, то, використовуючи вказівку 8^0, дістаємо рівносильну нерівність $\log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} > 1$ (при цьому умова $\log_{1/2} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0$ виконується автоматично). Далі, згідно з формулою (7.2), маємо $1 = \log_{1/2} \dfrac{1}{2}$, і оскільки $0 < 1/2 < 1$, то, знову використовуючи вказівку 8^0, дістаємо рівносильну даній нерівності систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{x+4}{2x-3} < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{11}{2(2x-3)} < 0. \end{cases}$$

Із другої нерівності системи випливає, що $2x-3<0$; отже, $x+4<0$, і задача зводиться до розв'язування рівносильної системи

$$\begin{cases} 2x-3<0, \\ x+4<0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x<3/2, \\ x<-4, \end{cases}$$

звідки $x<-4$. Таким чином, дістаємо відповідь: $(-\infty; -4)$. ▲

Приклад 11. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{1-\log_8(x^2-4x+3)}.$$

△ Оскільки логарифмічна функція визначена тільки для додатних чисел, а квадратний корінь — для невід'ємних чисел, задача зводиться до розв'язування системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ 1-\log_8(x^2-4x+3)\geqslant 0. \end{cases}$$

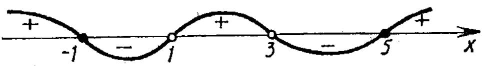

Рис. 9.10

Ліву частину першої нерівності розкладаємо на множники, а в другій замінимо 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ \log_8(x^2-4x+3)\leqslant \log_8 8. \end{cases}$$

Оскільки основа логарифма $8>1$, то, згідно з вказівкою 8^0, маємо систему

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ x^2-4x+3\leqslant 8, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ (x-5)(x+1)\leqslant 0. \end{cases}$$

Остання система рівносильна нерівності $(x-3)(x-1)(x-5)\times\times(x+1)\leqslant 0$, яку розв'язуємо методом інтервалів. За допомогою рис. 9.10 дістаємо відповідь: $[-1; 1)\cup(3; 5]$. ▲

Група А

9.001. Показати, що для всіх додатних чисел a і b справедлива нерівність $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

9.002. Довести, що коли $a>0$ і $b>0$, то

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant\sqrt[4]{ab}.$$

9.003. Довести, що коли $p>0$ і $q>0$, то $(p+2)(q+2)(p+q)\geqslant 16pq$.

9.004. Довести, що коли $a\neq 2$, то

$$\frac{1}{a^2-4a+4}>\frac{2}{a^3-8}.$$

9.005. Довести, що коли m, n і p — сторони деякого трикутника, то $m^2+n^2+p^2<2(mn+mp+np)$.

9.006. Довести, що коли $m\geqslant 0$ і $n\geqslant 0$, то $mn(m+n)\leqslant m^3+n^3$.

9.007. Довести, що для будь-яких дійсних чисел x і y справедлива нерівність $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$.

9.008. При яких значеннях a обидва корені рівняння $x^2-(a+1)x+2a+4=0$ будуть від'ємними?

9.009. Показати, що для будь-яких двох додатних чисел добуток їхньої суми на суму їхніх обернених величин не менший чотирьох.

9.010. Знайти цілі додатні значення x, що задовольняють нерівність $\frac{5x+1}{x-1}>2x+2$.

9.011. Знайти цілі розв'язки системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}+\frac{x}{2}<2-\frac{x+5}{2}, \\ 1-\frac{x+5}{8}+\frac{4-x}{2}<3x-\frac{x+1}{4}. \end{cases}$$

9.012. Знайти натуральні значення x, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1)<4, \\ \frac{x}{x-3}+\frac{x-5}{x}<\frac{2x}{3-x}. \end{cases}$$

9.013. При яких значеннях x функція $y=\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}$ набуває додатних значень?

9.014. Знайти множину цілих значень x, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x+2}>2, \\ \lg(x-1)<1. \end{cases}$$

9.015. При яких значеннях m нерівність $x^2-mx>2/m$ виконується для будь-яких x?

Знайти області визначення функцій **(9.016—9.021)**:

9.016. $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$. **9.017.** $y=0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}$.

9.018. $y=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$.

9.019. $y=\sqrt{\log_{1/2}\log_3\frac{x+1}{x-1}}$. **9.020.** $y=\sqrt{5-x-6/x}$.

9.021. $y=\sqrt{-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

Розв'язати нерівності **(9.022—9.095)**:

9.022. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$. **9.023.** $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2}<1$.

9.024. $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1$.

9.025. $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x$.

9.026. $\log_{0,3} (3x-8) > \log_{0,3} (x^2+4)$.

9.027. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

9.028. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

9.029. $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0$.

9.030. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$. 9.031. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} > 0$.

9.032. $|2x^2-9x+15| \geqslant 20$. 9.033. $|x^2-5x| < 6$.

9.034. $5x-20 \leqslant x^2 \leqslant 8x$.

9.035. $\frac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)} \leqslant 0$.

9.036. $\frac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)} > 0$.

9.037. $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}$.

9.038. $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0$. 9.039. $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0$.

9.040. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$. 9.041. $x^6-9x^3+8 > 0$.

9.042. $0,3^{2+4+6+\dots+2x} > 0,3^{72}$ $(x \in N)$.

9.043. $\sqrt{x^2-x-12} < x$.

9.044. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$.

9.045. $\sqrt{9x-20} < x$.

9.046. $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2$.

9.047. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0$.

9.048. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$. 9.049. $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$.

9.050. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$. 9.051. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x} \geqslant 1$.

9.052. $2^{1-2^{1/x}} < 0,125$. 9.053. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0$.

9.054. $5^{2x+1} > 5^x + 4$. 9.055. $0,5^{x-2} > 6$.

9.056. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1.$

9.057. $0,3^{\log_{1/3}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1.$

9.058. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}}>1.$

9.059. $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52.$

9.060. $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>2/3.$

9.061. $25^x<6\cdot 5^x-5.$ **9.062.** $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2,5.$

9.063. $4^{1/x-1}-2^{1/x-2}-3\leqslant 0.$

9.064. $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot 12,25^{(4x+1)/2}\geqslant 1.$

9.065. $\dfrac{15}{4+3x-x^2}>1.$ **9.066.** $0,64<\sqrt{0,8^{x(x-3)}}<1.$

9.067. $1/2+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{1/3}(x+3).$

9.068. $\log_{\frac{x-1}{x+5}}0,3>0.$ **9.069.** $(\log_{0,2}(x-1))^2>4.$

9.070. $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0.$

9.071. $\log_{0,3}(x^2-5x+7)>0.$

9.072. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0.$

9.073. $a^4+a^3-a-1<0.$

9.074. $m^3+m^2-m-1>0.$

9.075. $\log_2(1+\log_{1/9}x-\log_9 x)<1.$

9.076. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2.$

9.077. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}.$

9.078. $0,3^{2x^2-3x+6}<0,00243.$

9.079. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0.$

9.080. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0.$

9.081. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5.$

9.082. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1.$

9.083. $\dfrac{1}{3^x+5}<\dfrac{1}{3^{x+1}-1}.$

9.084. $\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1.$

9.085. $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25.$

9.086. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}.$

9.087. $|3 - \log_2 x| < 2.$

9.088. $5 \cdot 0{,}2^{\lg x} > 0{,}04^{\lg 2}.$

9.089. $\log_2 \log_{1/3} \log_5 x > 0.$

9.090. $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11.$

9.091. $0{,}5^{x} \leqslant 0{,}25^{x^2}.$

9.092. $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \leqslant 0.$

9.093. $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1.$

9.094. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6.$

9.095. $\log_4 (x + 7) > \log_2 (x + 1).$

Група Б

9.096. Довести, що добуток суми трьох додатних чисел на суму обернених чисел не менший 9.

9.097. Довести, що коли a — будь-яке дійсне число, то виконується нерівність

$$\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geqslant 2.$$

9.098. Знайти всі значення p, при яких вираз

$$\lg ((p - 1) x^2 + 2px + 3p - 2)$$

визначено при будь-яких x.

9.099. Знайти всі значення a, при яких вираз

$$\sqrt{(a + 1) x^2 - 2 (a - 1) x + 3a - 3}$$

має смисл для будь-яких $x \in \mathbf{R}$.

9.100. Знайти множину цілих значень x, що задовольняють нерівність

$$4^{2+\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 2^{2+\sqrt{x-1}} - 16 < 15 \cdot 4^{\sqrt{x-1}} + 2^{3+\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

9.101. При яких значеннях p обидва корені квадратного тричлена $x^2 + 2(p + 1) x + 9p - 5$ від'ємні?

9.102. При яких значеннях n обидва корені рівняння $(n - 2) x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ додатні?

9.103. При яких значеннях m корені рівняння $4x^2 - (3m + 1) x - m - 2 = 0$ знаходяться в проміжку між -1 і 2?

9.104. При яких значеннях a квадратний тричлен $ax^2 - 7x + 4a$ набуває від'ємних значень для будь-яких дійсних значень x?

9.105. Знайти цілі числа x, що задовольняють нерівність $\left|\frac{2}{x - 13}\right| > \frac{8}{9}.$

9.106. Довести, що за умови $2y + 5x = 10$ виконується нерівність $3xy - x^2 - y^2 < 7$.

9.107. Довести, що коли $4b + a = 1$, то виконується нерівність $a^2 + 4b^2 \geqslant 1/5$.

9.108. Довести, що многочлен $m^6 - m^5 + m^4 + m^2 - m + 1$ набуває додатних значень при всіх дійсних значеннях m.

9.109. Знайти область визначення функції f, якщо

$$f(x) = \sqrt[6]{4^{(x+1)/x} - 17 \cdot 2^{1/x} + 4}.$$

9.110. Знайти область визначення функції f, якщо

$$f(x) = \sqrt{9 - \left(\frac{4x - 22}{x - 5}\right)^2}.$$

9.111. Знайти цілі невід'ємні значення x, що задовольняють нерівність

$$\frac{x + 3}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} < \frac{2x}{2x - x^2}.$$

9.112. При яких значеннях a нерівність $\frac{ax}{x^2 + 4} < 1{,}5$ виконується для будь-яких значень $x \in \mathbf{R}$?

9.113. Знайти область визначення функції f, якщо

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 9) + 4}.$$

9.114. При яких значеннях x вираз $\log_3(1 - \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2{,}5))$ визначений?

9.115. Знайти ті значення m, при яких нерівність

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m + 1)x + 9m + 4} < 0$$

виконується для будь-яких дійсних значень x.

9.116. При яких значеннях x різниця $\frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x$ набуває тільки від'ємних значень?

9.117. При яких значеннях m нерівність $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ виконується для будь-яких x?

9.118. При яких значеннях m нерівність $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ виконується для будь-яких x?

9.119. При яких значеннях a сума $a + \frac{-1 + 9a + 4a^2}{a^2 - 3a - 10}$ набуває тільки додатних значень?

9.120. Знайти цілі значення x, що задовольняють нерівність $\log_4 x + \log_2(\sqrt{x} - 1) < \log_2 \log_{\sqrt{5}} 5$.

9.121. Показати, що при будь-яких дійсних x функція $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ не може набувати значень, більших 3/2 і менших 1/2.

Знайти області визначення функцій (9.122—9.129):

9.122. $y = 2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$. 9.123. $y = \dfrac{\sqrt{4x - x^2}}{\log_3 |x-4|}$.

9.124. $y = \log_8 \left(0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}} x} - 1{,}25^{8-(\log_2 x)^2}\right)$.

9.125. $y = \sqrt{\log_{1/3} \log_3 |x-3|}$.

9.126. $y = \sqrt{\log_{1/2}^2 (x-3) - 1}$.

9.127. $y = \sqrt[4]{2 - \lg |x-2|}$.

9.128. $y = \log_8 \left(2^{\log_{x-3} 0{,}5} - 1\right) + \dfrac{1}{\log_3 (2x-6)}$.

9.129. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)} - 1} + \dfrac{1}{\log_8 (x-4)}$.

Розв'язати нерівності (9.130—9.205):

9.130. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$. 9.131. $\log_{|x-1|} 0{,}5 > 0{,}5$.

9.132. $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$. 9.133. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$.

9.134. $0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} < 0{,}5$.

9.135. а) $\dfrac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$;

б) $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leqslant -4$.

9.136. $\left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - x - \dfrac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right) > 0$.

9.137. $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{1/2} \dfrac{x^3}{8}\right)^2 + 9\log_2 \dfrac{32}{x^2} < 4(\log_{1/2} x)^2$.

9.138. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2$.

9.139. $\dfrac{m^2x+1}{2} - \dfrac{m^2x+3}{3} < \dfrac{m+9x}{6}$.

9.140. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.

9.141. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$. 9.142. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$.

9.143. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

9.144. $\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2 |x-1|} > 0$.

9.145. $\sqrt{3}\cos^{-2} x < 4 \operatorname{tg} x$.

9.146. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

9.147. $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0$.

9.148. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0$.

9.149. $\dfrac{3}{6x^2 - x - 12} < \dfrac{25x - 47}{10x - 15} - \dfrac{3}{3x + 4}$.

9.150. $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2 - 4x} < 0$. 9.151. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

9.152. $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{2}$. 9.153. $\log_{4/3}(\sqrt{x+3} - x) > 0$.

9.154. $\dfrac{2 - x}{x^3 + x^2} > \dfrac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}$.

9.155. $0{,}2^{\frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0{,}008^{2\log_4 x - 1}}$.

9.156. $2{,}25^{\log_2(x^2 - 3x - 10)} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2 + 4x + 4)}$.

9.157. $\log_{0,5}(x+3) < \log_{0,25}(x+15)$.

9.158. $\log_{1/3}(x-1) + \log_{1/3}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$.

9.159. $2\log_3 \log_3 x + \log_{1/3}\log_3(9\sqrt[3]{x}) \geqslant 1$.

9.160. $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30{,}04$.

9.161. $0{,}4^{\left(\log_3 \frac{3}{x}\right)\log_3 3x} > 6{,}25^{\log_3 x^2 + 2}$.

9.162. $0{,}3^{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots} < \sqrt[3]{0{,}3^{3x^2 + 5x}} < 1$.

9.163. $\dfrac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x+3)} > 0$.

9.164. $\log_3 \log_4 \dfrac{4x - 1}{x + 1} - \log_{1/3}\log_{1/4}\dfrac{x+1}{4x-1} < 0$.

9.165. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5$.

9.166. $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$.

9.167. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2 - x + 1} \leqslant \dfrac{1 - 2x}{x^3 + 1}$.

9.168. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$.

9.169. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}\leqslant\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

9.170. $\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geqslant\frac{5(6-x)}{x-2}$.

9.171. $0{,}6^{\lg^2(-x)+3}\leqslant(5/3)^{2\lg x^2}$.

9.172. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leqslant x^2-9$.

9.173. $(3/5)^{13x^2}\leqslant(3/5)^{x^4+36}<(3/5)^{12x^2}$.

9.174. $|x-3|^{2x^2-7x}>1$. 9.175. $\log_{1/5}x+\log_4 x>1$.

9.176. $-9<x^4-10x^2<56$. 9.177. $216x^6+19x^3<1$.

9.178. $x^{0{,}5\log_{0{,}5}x-3}\geqslant 0{,}5^{3-2{,}5\log_{0{,}5}x}$.

9.179. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

9.180. $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0$.

9.181. $\log_{0{,}3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$.

9.182. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

9.183. $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0$.

9.184. $\log_{0{,}25}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$.

9.185. $x^2(x^4+36)-6\sqrt{3}(x^4+4)<0$.

9.186. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$. 9.187. $2\log_{\log_3 x}3<1$.

9.188. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.

9.189. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

9.190. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}>0$.

9.191. $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x)<5$.

9.192. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$.

9.193. $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0{,}5}(x-1)>5$.

9.194. $25\cdot 2^x-10^x+5^x<25$.

9.195. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$.

9.196. $0{,}5^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.

9.197. $x^2(x+3\sqrt{5})+5(3x+\sqrt{5})>0$.

9.198. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot 5^{\log_2(x-1)-1}$.

9.199. $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \dfrac{1}{2}$.

9.200. $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)} < \dfrac{1}{2}$.

9.201. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} < \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

9.202. $x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17$.

9.203. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$.

9.204. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1) < 1$.

9.205. $(x^2+4x+10)^2 - 7(x^2+4x+11) + 7 < 0$.

9.206. Розмістити у порядку зростання три числа: $a_1 = \log_{1/2}\sin 2x$, $a_2 = -1 - \log_2 \sin x$, $a_3 = \log_{1/2}(1-\cos 2x)$, якщо $0 < x < \pi/4$.

Розв'язати системи нерівностей (**9.207—9.214**):

9.207. $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \leqslant 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x} + \dfrac{1}{2} > 0. \end{cases}$

9.208. $\sqrt{x^2-9x+20} \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2-13}$.

9.209. $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64} > 0, \\ \lg\sqrt{x+7} > \lg(x-5) - 2\lg 2. \end{cases}$

9.210. $\dfrac{5x-7}{x-5} < 4 - \dfrac{x}{5-x} + \dfrac{3x}{x^2-25} < 4$.

9.211. $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

9.212. $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$

9.213. $\begin{cases} |x^2+5x| < 6, \\ |x+1| \leqslant 1. \end{cases}$ **9.214.** $\begin{cases} |x^2-4x| < 5, \\ |x+1| < 3. \end{cases}$

9.215. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}} + \frac{2}{x^2-49}.$$

Група В

Розв'язати нерівності (**9.216—9.220**):

9.216. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{\log_5 x\,(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

9.217. $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$. 9.218. $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$.

9.219. $\frac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|}$.

9.220. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

9.221. Довести, що із всіх прямокутних паралелепіпедів із заданою сумою всіх ребер найбільший об'єм має куб. (Для доведення можна використати, наприклад, нерівність $(a+b+c+d)/4 \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, справедливу для всіх додатних чисел.)

9.222. При яких значеннях p система нерівностей

$$-9 < \frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} < 6$$

виконується для всіх дійсних значень x?

9.223. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7\cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$$

9.224. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\sin x - 0{,}5} + \log_3(25 - x^2).$$

9.225. Довести, що при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$ виконується нерівність $(a+b+c+d)/4 \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

9.226. При яких значеннях m система нерівностей

$$-6 < \frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1} < 4$$

виконується для всіх дійсних значень x?

Довести справедливість нерівностей (9.227—9.230):

9.227. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right) \geqslant 8 \quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

9.228. $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (a>0,\ b>0)$.

9.229. $\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

9.230. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$.

9.231. Не використовуючи таблиць показати, що $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$.

9.232. Нехай число $x_1 > 0$ є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$. Показати, що існує корінь x рівняння $cx^2+bx+a=0$ такий, що $x_1 + x_2 \geqslant 2$.

9.233. Довести, що коли $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30) < 0$, то $\sin 2x > 0$.

9.234. Із значень x, що задовольняють нерівність $\log_{1,3}(2x-2) < \log_{1,3}(x+1)$, вказати ті, для яких $\sin 2x < 0$.

9.235. Числа x_1 і x_2 є дійсними коренями рівнянь $5x^3-6=0$ і $6x^3-5=0$ відповідно. Показати, що $x_1+x_2>2$.

Розв'язати нерівності (**9.236—9.290**):

9.236. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$.

9.237. $\log_x \log_2(4^x-12) \leqslant 1$. **9.238.** $10 \cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}}(\mathrm{tg}\, x)}} > 3$.

9.239. $2 < 2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2} < 8$. **9.240.** $2^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}} > 3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$.

9.241. $0{,}2^{\cos 2x} - \dfrac{1}{25^{\cos^2 x}} < 4 \cdot 125^{-1/2}$.

9.242. $\log_x \log_3(9^x-6) \geqslant 1$.

9.243. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2+4x-4)} < 1$ $(x \in \mathbb{Z})$.

9.244. $\sqrt{1-9(\log_{1/8} x)^2} > 1-4\log_{1/8} x$.

9.245. $\log_{1/2} x + \sqrt{1-4(\log_{1/2} x)^2} < 1$.

9.246. $\log_{x^2}(3-2x) > 1$. **9.247.** $\log_3(4^x+1)+\log_{(4^x+1)} 3 > 2{,}5$.

9.248. $\log_3(3^x-1) \cdot \log_{1/3}(3^{x+2}-9) > -3$.

9.249. $\log_p \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} < 0$.

9.250. $|x^3-1| > 1-x$. **9.251.** $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

9.252. $\log_x(x^3+1) \cdot \log_{x+1} x > 2$. **9.253.** $\log_x(x+1) < \log_{1/x}(2-x)$.

9.254. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0$. **9.255.** $\log_x(x^2+3x-3) > 1$.

9.256. $|x-1|+|2-x| > 3+x$.

9.257. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

9.258. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

9.259. $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$. **9.260.** $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

9.261. $\log_{1/2} \dfrac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2} \leqslant 0$. **9.262.** $\log_{x^2} \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

9.263. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$. **9.264.** $(3/7)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\mathrm{ctg}\, x)-1}} > 1$.

9.265. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$. **9.266.** $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$.

9.267. $(2^x + 3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2 (x+6)} > 1$.

9.268. $\log_{|x-4|}(2x^2 - 9x + 4) \geqslant 1$.

9.269. $\dfrac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}} \leqslant \dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)}$.

9.270. $\log_x \dfrac{3}{8-2x} \geqslant -2$.

9.271. $\log_{1/2}(x-3) - \log_{1/2}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.

9.272. $|2^{4x^2-1} - 5| \leqslant 3$. **9.273.** $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

9.274. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2+x+1)^3$.

9.275. $\dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$.

9.276. $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$.

9.277. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + 12^\circ\right) + \operatorname{tg}(x + 12^\circ) > 0$.

9.278. $(15/14)^{|x+7|} < (15/14)^{|x^2-3x+2|}$.

9.279. $\log_x 10 - 0{,}5\log_a 10 > 0$ $(0 < a < 1)$.

9.280. $\log_7 x - \log_3 7 \cdot \log_3 x > \log_2 0{,}25$.

9.281. $x^{\log_a x+4} < a^4 x$ $(0 < a < 1)$.

9.282. $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

9.283. $\log_x^2 \sqrt{5} - \log_x 5\sqrt{5} + \dfrac{5}{4} < 0$.

9.284. $|\log_3 x| < \left|\log_3 \dfrac{x}{9}\right|$.

9.285*. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(x + \pi/2) + 2\operatorname{ctg}(x + \pi/3) \geqslant 0$.

9.286*. $\sin^3 x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

9.287*. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.
9.288*. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$.
9.289*. $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.
9.290*. $\sin(2x + 10^\circ) + \sin(x + 10^\circ) - \sin x < 0$.
2.291. Показати, що $1/8 < \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 70^\circ < 1/4$.

9.292*. Розв'язати нерівність $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3\operatorname{tg} x$.
9.293. Показати, що $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \geqslant 3$.

9.294*. Показати, що за умови $360° k - 45° < \alpha \leqslant 360° k + 45°$, де $k \in \mathbf{Z}$, виконується нерівність $\operatorname{ctg}(45° - \alpha) + \operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg}(45° + \alpha) \geqslant 3$.

9.295*. Розв'язати нерівність $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \leqslant 1/2$.

9.296*. Розв'язати нерівність $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1$.

9.297*. Розв'язати нерівність $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 \leqslant 0$.

9.298. Показати, що $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \sqrt{2} + 1$.

9.299. Показати, що $1/8 < \sin 20° \sin 50° \sin 70° < 1/4$.

9.300. Розв'язати нерівність $\log_{x^2-3} 729 > 3$.

9.301. Розв'язати нерівність $\dfrac{\log_a (35 - x^3)}{\log_a (5 - x)} > 3$.

9.302. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{1/4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1}.$$

9.303. Знайти множину цілих значень x, що задовольняють нерівність $\log_{0,3}(\sqrt{x+5} - x + 1) > 0$.

9.304. При яких значеннях x нерівність $y^2 - (5^x - 1)(y - 1) > 0$ виконується для всіх значень y.

9.305. Знайти a із нерівності $x^2 - 2^{a+2} x - 2^{a+3} + 12 > 0$ за умови, що вона виконується для будь-яких значень x.

Глава 10

ЗАДАЧІ З ПЛАНІМЕТРІЇ

Основні формули

1°. Довільний трикутник (a, b, c — сторони; α, β, γ — протилежні їм кути; p — півпериметр; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола; S — площа; h_a — висота, проведена до сторони a):

$$S = \frac{1}{2} a h_a; \qquad (10.1) \qquad S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha; \qquad (10.2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (10.3)$$

$$r = \frac{S}{p}; \qquad (10.4) \qquad R = \frac{abc}{4S}; \qquad (10.5)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ (\textit{теорема косинусів}); \qquad (10.6)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \ (\textit{теорема синусів}). \qquad (10.7)$$

2°. Прямокутний трикутник (a, b — катети; c — гіпотенуза; a_c, b_c — проекції катетів на гіпотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab; \qquad (10.8) \qquad S = \frac{1}{2} c h_c; \qquad (10.9)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \quad (10.10) \qquad R = \frac{c}{2}; \quad (10.11)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\textit{теорема Піфагора}); \quad (10.12)$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad (10.13) \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad (10.14) \qquad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \quad (10.15)$$

$$a = c \sin\alpha = c\cos\beta = b \operatorname{tg}\alpha = b \operatorname{ctg}\beta. \quad (10.16)$$

3°. Рівносторонній трикутник:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad (10.17) \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad (10.18) \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad (10.19)$$

4°. Довільний опуклий чотирикутник (d_1 і d_2 — діагоналі; φ — кут між ними; S — площа):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \quad (10.20)$$

5°. Паралелограм (a і b — суміжні сторони; α — кут між ними; h_a — висота, проведена до сторони a):

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \quad (10.21)$$

6°. Ромб:

$$S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2. \quad (10.22)$$

7°. Прямокутник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \quad (10.23)$$

8°. Квадрат (d — діагональ):

$$S = a^2 = d^2/2. \quad (10.24)$$

9°. Трапеція (a і b — основи; h — відстань між ними; l — середня лінія):

$$l = \frac{a+b}{2}; \quad (10.25) \qquad S = \frac{a+b}{2}\cdot h = lh. \quad (10.26)$$

10°. Описаний многокутник (p — півпериметр; r — радіус вписаного кола):

$$S = pr. \quad (10.27)$$

11°. Правильний многокутник (a_n — сторона правильного n-кутника; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R; \quad (10.28)$$

$$S = \frac{na_n r}{2}. \quad (10.29)$$

12°. Коло, круг (r — радіус; C — довжина кола; S — площа круга):

$$C = 2\pi r; \quad (10.30) \qquad S = \pi r^2. \quad (10.31)$$

Частина II

АЛГЕБРА. ГЕОМЕТРІЯ (ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ) ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

Глава 14

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ З АЛГЕБРИ

Приклад 1. Показати, що $\log_2\cos 20^\circ + \log_2\cos 40^\circ + \log_2\cos 80^\circ = -3$.

△ Твердження правильне, коли справджується рівність $\log_2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ) = -3$ (використано формулу (7.4)) або $\log_2 A = -3$, де $A = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$. Помножимо і поділимо праву частину останньої рівності на $8 \sin 20^\circ$:

$$A = \frac{4 \cdot 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ}.$$

Застосувавши тричі послідовно формулу (3.13), дістаємо

$$A = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = 2^{-3}.$$

Отже, $\log_2 A = \log_2 2^{-3} = -3$. ▲

Приклад 2. При яких значеннях p рівняння

$$x^2 - (2^p - 1)x - 3(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

має однакові корені?

△ Квадратне рівняння має однакові корені, якщо його дискримінант $D = b^2 - 4ac$ дорівнює нулю. Знаходимо

$$D = (2^p - 1)^2 + 4 \cdot 3(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 2^{2p} - 2 \cdot 2^p + 1 + \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} -$$

$$- \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} = 4 \cdot 2^{2p} - 5 \cdot 2^p + 1.$$

Використовуючи заміну змінної $2^p = y$, дістаємо рівняння $4y^2 - 5y + 1 = 0$, яке має корені $y_1 = 1/4$, $y_2 = 1$. Розв'язуємо рівняння $2^p = 2^{-2}$ і $2^p = 1$, звідки $p = -2$ і $p = 0$. ▲

Приклад 3. Розв'язати рівняння $|x - 1| \cdot |x + 2| = 4$.

△ Оскільки $|xy| = |x| \cdot |y|$, перепишемо дане рівняння у вигляді $|(x-1)(x+2)| = 4$. Воно рівносильне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > 0, \\ (x-1)(x+2) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0, \\ -(x-1)(x+2) = 4. \end{cases}$$

У першій системі корені рівняння $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ задовольняють нерівність цієї системи, а значить, і саму систему; дискримінант квадратного рівняння другої системи від'ємний; тобто, ця система несумісна. Отже, маємо відповідь: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. ▲

Приклад 4. При яких цілих значеннях a нерівність

$$2 \log_{0,5} a - 3 + 2x \log_{0,5} a - x^2 < 0$$

справджується в будь-якій точці осі Ox?

△ Замінимо задану нерівність рівносильною: $x^2 - 2x \log_{0,5} a + 3 - 2 \log_{0,5} a > 0$. Оскільки коефіцієнт при x^2 додатний, то нерівність справджується в будь-якій точці осі Ox, якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний (див. вказівку 4°, гл. 9). Отже,

$$4 \log^2_{0,5} a - 4(3 - 2 \log_{0,5} a) < 0, \quad \text{або} \quad \log^2_{0,5} a + 2 \log_{0,5} a - 3 < 0.$$

Рис. 14.1

Після заміни змінної $y = \log_{0,5} a$ дістаємо нерівність $y^2 + 2y - 3 < 0$; $f(y) = y^2 + 2y - 3 = 0$ при $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Схематичне розміщення параболи відносно осі Oy показано на рис. 14.1. Звідси знаходимо $-3 < y < 1$.

Розв'язуємо нерівність $-3 < \log_{0,5} a < 1$, яку, використовуючи **формули (7.6) і (7.2),** запишемо у вигляді $\log_{0,5} 0{,}5^{-3} < \log_{0,5} a < \log_{0,5} 0{,}5$. Оскільки основа логарифму $0 < 0{,}5 < 1$, то за вказівкою **7° із гл. 9** дістаємо рівносильну цій нерівності систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0{,}5 < a < 0{,}5^{-3}, \text{ тобто } 0{,}5 < a < 8. \end{cases}$$

Цілими значеннями a, які задовольняють останню нерівність, є числа 1, 2, ..., 7. ▲

Приклад 5. Розв'язати нерівність $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

△ Оскільки основа степеня $10 > 1$, то на підставі вказівки 7° із гл. 9 перейдемо до рівносильної нерівності $|\sin x| > |\cos x|$. Звідси,

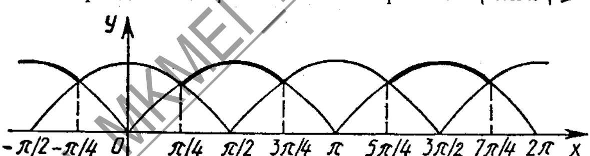

Рис. 14.2

використовуючи вказівку 2°, г) із гл. 9, дістанемо $\sin^2 x > \cos^2 x$. Далі, застосувавши тотожні перетворення тригонометричних виразів, маємо

$$\sin^2 x > 1 - \sin^2 x; \quad 2\sin^2 x > 1; \quad 1 - \cos 2x > 1; \quad \cos 2x < 0,$$

звідки $\pi/2 + 2\pi k < 2x < 3\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отже, дістаємо відповідь: $\pi/4 + \pi k < x < 3\pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ▲

Розв'язок нерівності $|\sin x| > |\cos x|$ можна також знайти графічно, побудувавши графіки функцій $|\sin x|$ і $|\cos x|$ на одному рисунку (рис. 14.2).

Приклад 6. Довести, що графіки функцій $y = m \cdot 3^x + n$ і $y = n \cdot 3^{-x} + m$ при умові $mn < 0$ перетинаються у двох точках, одна з яких лежить на осі абсцис, а друга — на осі ординат.

Δ Абсциси точок перетину графіків є коренями рівняння $m \cdot 3^x + n = n \cdot 3^{-x} + m$; помноживши всі його члени на $3^x \neq 0$ і згрупувавши подібні доданки, дістанемо $m \cdot 3^{2x} + (n - m) \cdot 3^x - n = 0$.

Нехай $3^x = y > 0$; розв'яжемо квадратне рівняння $my^2 + (n - m)\,y - n = 0$. Маємо $D = (n - m)^2 + 4mn = (n + m)^2$, тобто, $y_{1,2} = \dfrac{-(n - m) \pm (n + m)}{2m}$; $y_1 = 1$, $y_2 = -n/m > 0$ ($mn < 0$ за умовою).

Із рівняння $3^x = 1$ знаходимо $x = 0$, а із рівняння $3^x = -n/m$ дістаємо $x = \log_3(-n/m)$. Знайдемо ординати точок перетину. Якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = m \cdot 3^0 + n = m + n$. Точка $(0; m + n)$ лежить на осі Oy. Якщо $x_2 = \log_3(-n/m)$, то $y_2 = m \cdot 3^{\log_3(-n/m)} + n = m(-n/m) + n = 0$ (оскільки $3^{\log_3(-n/m)} = -n/m$ в силу рівності (7.1)). Точка $(\log_3(-n/m); 0)$ лежить на осі Ox. $\blacktriangle$

Спростити вирази (14.001—14.004):

14.001. $\dfrac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\dfrac{m^2-1}{2m}\right)^2}$.

14.002. $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^8}}$. **14.003.** $\sqrt{\dfrac{1-\cos 246^\circ}{1+\cos 246^\circ}}$.

14.004. $\sqrt{\dfrac{\cos(\pi+\alpha)+1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

Розв'язати рівняння (14.005—14.026):

14.005. $\sqrt{x^2-1}-\dfrac{6}{\sqrt{x^2-1}}=1$.

14.006. $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}+\dfrac{1}{x}}=5$. **14.007.** $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

14.008. $\dfrac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4}=3^{\sqrt{-3x}}$. **14.009.** $4^{\log_2 x}+x^2=8$.

14.010. $\lg^2 x^2=1$. **14.011.** $\log_2\log_3\log_4 x=0$.
14.012. $x^{2\log_2 x}=8$. **14.013.** $\log_3(\log_2^2(x-4))=0$.
14.014. $\lg^2 10x+\lg x=19$. **14.015.** $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$.

14.016. $x^{\log_3 x}=\sqrt[4]{3x^3}$. **14.017.** $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

14.018. $\log_2(\sqrt{4x+5}-1)=0{,}5\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$.

14.019. $\log_2^2 4x-4\log_4 x=12$.

14.020. $\log_{x+6}(2x-\sqrt{x+6})=0{,}5$. **14.021.** $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

14.022. $2x-\lg(5^{2x}+4^x-16)=x\lg 4$.

14.023. $x + \lg(1 + 4^x) = \lg 50$.
14.024. $\cos^{58} x + \sin^{40} x = 1$.
14.025. $\log_{\cos x} \sin x = 1$. **14.026.** $\operatorname{ctg}(\sin x) = 1$.

Розв'язати системи рівнянь (14.027—14.032):

14.027. $\begin{cases} 6{,}751x + 3{,}249y = 26{,}751, \\ 3{,}249x + 6{,}751y = 23{,}249. \end{cases}$

14.028. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3{,}0. \end{cases}$ **14.029.** $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$

14.030. $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$ **14.031.** $\begin{cases} 0{,}5 \log_2 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

14.032. $\begin{cases} x^{\log_y x} = 2, \\ y^{\log_x y} = 16. \end{cases}$

14.033. При якому значенні q сума кубів коренів рівняння $x^2 - x - q = 0$ дорівнює 19?

14.034. При яких значеннях p сума квадратів коренів рівняння $x^2 + px + 35 = 0$ дорівнює 74?

14.035. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$, обчислити суму кубів його коренів.

14.036. Чи має рівняння $(2x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$ дійсні корені?

14.037. Скільки коренів має рівняння $0{,}3^x = x^2 - x + 1$?

14.038. Переконатися, що обидва корені рівняння $2^x + x^2 - 3 = 0$ більші $-\sqrt{3}$, причому один з них точно дорівнює 1.

14.039*. Розв'язати рівняння $x^3 - 7x - 6 = 0$. Переконатися в тому, що сума всіх його коренів дорівнює нулю. Чи можна в цьому переконатися, не знаходячи самих коренів?

14.040. Розв'язати графічно рівняння $|x - 1| + 2x - 5 = 0$.

14.041. Показати графічно, що рівняння $\lg x = \lg 2x$ не має коренів.

14.042. Скільки коренів має рівняння $x^2 = \sin 3x$?

14.043. Показати, що рівняння $\sqrt{9 - x^2} - \log_3(|x| - 3) = 0$ не має коренів.

14.044. Скільки дійсних розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3? \end{cases}$$

14.045. Розв'язати рівняння $|x^2 + 1{,}5x + 1| = m$. При яких значеннях m воно має єдиний розв'язок?

14.046. Знайти число x, якщо числа 1, 7, 13, ..., x складають арифметичну прогресію, для якої $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.

14.047. Знайти раціональні корені рівняння

$$\frac{\sqrt{x+2}}{|x|} + \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

14.048. Знайти цілі корені рівняння $x^3 - |x - 1| = 1$.

14.049. Чому дорівнює сума всіх коренів будь-якого біквадратного рівняння?

14.050. Довести, що послідовність, яка задана формулою $y_n = \frac{10n+7}{2n}$, спадає.

14.051. Чи рівносильні рівняння

$$(1+2\sin x)\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{і} \quad \frac{1+2\sin x}{\operatorname{ctg} x} = 0?$$

14.052. Показати, що рівняння $\sin x + \sin 2x = 2$ не має коренів.

14.053. При якому значенні m система

$$\begin{cases} 2x + (m-1)\,y = 3, \\ (m+1)\,x + 4y = -3 \end{cases}$$

має безліч розв'язків; не має розв'язків?

Визначити знаки чисел **(14.054—14.056).**

14.054. $\log_{1,7}(0,5(1-\log_7 3))$.

14.055. $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)$. **14.056.** $\dfrac{\log_3 5 - \log_5 3}{\log_{0,3} 4 - \log_{0,3} 3}$.

14.057. Чому дорівнює основа логарифма, при якій число a дорівнює своєму логарифму?

14.058. Записати x у вигляді десяткового дробу, якщо $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

14.059. Обчислити $x = 0,8\left(1 + 9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$.

14.060. Обчислити без таблиць $\lg 32,11 - \lg 0,03211$.

14.061. Обчислити $\log_{1/2} 28$, якщо $\log_7 2 = a$.

14.062. Знайти $\lg^2 \sqrt{x}$, якщо $\log_x 100 = a$.

14.063. Знайти $\log_9 2,97$, якщо $\lg 3 = a$ і $\lg 11 = b$.

Обчислити **(14.064—14.067).**

14.064. $\lg\operatorname{tg} 2^\circ + \lg\operatorname{tg} 4^\circ + \lg\operatorname{ctg} 2^\circ + \lg\operatorname{ctg} 4^\circ$.

14.065. $\lg\operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 9^\circ \cdots \lg\operatorname{tg} 87^\circ$.

14.066. $\lg\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 3^\circ \cdots \lg\operatorname{tg} 89^\circ$.

14.067. $\lg\operatorname{tg} 1^\circ + \lg\operatorname{tg} 2^\circ + \lg\operatorname{tg} 3^\circ + \cdots + \lg\operatorname{tg} 89^\circ$.

14.068. Чому дорівнює добуток $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_{10} 9$, якщо $\lg 2 = 0,3010$?

14.069. Обчислити $\log_2 36$, якщо $\log_{12} 9 = m$.

14.070. Визначити знак добутку $\lg\sin 32^\circ \cdot \lg\cos 17^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 40^\circ \times \lg\operatorname{ctg} 20^\circ$.

14.071. Який знак має число $\lg \operatorname{arctg} 2$?

14.072. Довести, що $\log_2 5$ — ірраціональне число.

14.073. Чи завжди неправильна рівність $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$?

14.074. Довести, що коли $a^2 + b^2 = 7ab$, то

$$\log_k \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_k a + \log_k b).$$

14.075. Знайти помилку в таких міркуваннях:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad 2\log_a \frac{1}{2} > 3\log_a \frac{1}{2}.$$

Скорочуючи обидві частини нерівності на $\log_a \frac{1}{2}$, дістаємо $2 > 3$.

Розв'язати нерівності (14.076—14.100):

14.076. $x^3+4 \geqslant x^2+4x$. 14.077. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \geqslant \frac{6}{x^3}$.

14.078. $-\frac{15}{x^2}-\frac{16}{x^4}<-1$. 14.079. $x^3-2x^2-x+2>0$.

14.080. $x^2-4|x|+3>0$. 14.081. $x^2-5|x|+6<0$.

14.082. $\frac{3|x|-14}{x-3} \leqslant 4$. 14.083. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

14.084. $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$. 14.085. $\frac{\sqrt{1-2x+x^2}+x}{x}>0$.

14.086. $7^{x^2-4x-2}>1/49$. 14.087. $0{,}5^{(x^2+x-2)(3-x)}>1$.

14.088. $1<2^{x(x+2)}<8$.

14.089. $\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$.

14.090. $2\lg x<\lg^2 x$. 14.091. $\lg\frac{6}{x}>\lg(x+5)$.

14.092. $\log_2(1+\log_{1/3} x)<1$. 14.093. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leqslant \frac{1}{2}$.

14.094. $x^{\log_{0,2}0,3}+0{,}3^{\log_{0,2}x} \leqslant 0{,}18$.

14.095. $\log_{1/2}\log_3 x>1$.

14.096. $x^2\log_2 0{,}3-2\log_2 0{,}09>0$.

14.097. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}<1$. 14.098*. $x^{-3x-8}>x^7$.

14.099. $\frac{\sin x}{1+\cos x} \geqslant 0$. 14.100. $\sin x\cos x>1/4$.

14.101. Для яких точок осі Ox виконується нерівність: а) $\sin x<1/2$; б) $|\sin x|<1/2$?

14.102. Що більше: $\sin 2x$ чи $2\sin x$?

14.103. Для різних x із області визначення функцій з'ясувати, яка з величин більша: $\lg x^2$ або $\lg^2 x$.

14.104. Які значення може набувати x, якщо $\log_x(a^2+1)<0$?

14.105. Що більше: 3^{400} чи 4^{300}?

14.106. При яких значеннях a виконується нерівність $\frac{5a+6}{4-a}>1$?

14.107. Чи існують такі a, при яких корені рівняння $x^2-2(a-3)x-a+3=0$ належать проміжку $(-3; 0)$?

14.108. При яких значеннях x вираз $\log_{1/2}(x^2-8)$ невід'ємний?

14.109. Довести, що $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, якщо $ab>0$.

14.110*. Довести, що коли $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant 1/3$; a, b, c — дійсні числа.

14.111. Довести, що сума кубів катетів менша від куба гіпотенузи.

14.112. Довести, що в будь-якому трикутнику сума довжин трьох медіан менша від периметра і більша від півпериметра.

14.113. Довести, що коли a, b, c — відповідно катети і гіпотенуза, то $a + b \leq c\sqrt{2}$.

14.114*. Довести справедливість нерівності

$$\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt[3]{a^3 + b^3} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Побудувати графіки функцій (14.115—14.134):

14.115. а) $y = x^2 + 5x + 6$; б) $y = x^2 + 5|x| + 6$;
в) $y = |x^2 + 5x + 6|$; г) $y = |x^2 + 5|x| + 6|$.

14.116. а) $y = -x^2 + 4x - 5$;
б) $y = -x^2 + 4|x| - 5$;
в) $y = |-x^2 + 4x - 5|$;
г) $y = |-x^2 + 4|x| - 5|$.

14.117. а) $y = \log_{1/2} x$; б) $y = \log_{1/2}(-x)$;
в) $y = \log_{1/2}|x|$; г) $y = |\log_{1/2} x|$;
д) $y = |\log_{1/2}|x||$.

14.118. а) $y = \sin x$; б) $y = 2\sin x$;
в) $y = \sin 2x$; г) $y = \sin\dfrac{x}{2}$.

14.119. а) $y = \cos x$; б) $y = \cos|x|$;
в) $y = |\cos x|$; г) $y = |\cos|x||$.

14.120. $y = \dfrac{1 + x}{x}$. 14.121. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

14.122. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$. 14.123. $y = 2^{1/x}$.

14.124. $y = -\dfrac{1}{\cos x}$. 14.125. $y = \log_2(\sin x \cos x)$.

14.126. $y = \log_2 \sin x$. 14.127. $y = |x + 1| - x$.

14.128. $y = x|x| + 1$. 14.129. $y = x + \dfrac{|x|}{x}$.

14.130. $y = -2^{-|x|}$. 14.131. $y = 2^x \cdot 2^{|x|}$.

14.132. $y = \lg x + |\lg x|$. 14.133. $y = \dfrac{|x - 1|}{x - 1} \cdot (x^2 - 4)$.

14.134. $y = \sqrt{(x + 2)^2} + \sqrt{(x - 2)^2}$.

14.135. Як, знаючи графік $f(x)$, побудувати графік $|f(x)|$? Чи можна за графіком $|f(x)|$ відновити графік $f(x)$?

14.136. Записати найпростішою формулою функцію f, яка одночасно є парною, непарною, незростаючою, неспадною і періодичною.

14.137. Якщо $\log_a \sin 40° + \log_a \mathrm{tg}\, 40° + \log_a \cos^{-1} 40° = b$, то чому дорівнює сума $\log_a \sin 50° + \log_a \mathrm{tg}\, 50° + \log_a \cos^{-1} 50°$?

14.138. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 1/x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

і показати, що $x = 0$ є точкою мінімуму даної функції. Крім того, на цьому прикладі показати, що не обов'язково зліва від точки мінімуму розміщується проміжок спадання функції, а справа — проміжок зростання; може бути і навпаки.

14.139. На рис. 14.3 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначити, додатне, від'ємне чи дорівнює нулю кожне із чисел a, b і c.

14.140. На рис. 14.4 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначити, додатне, від'ємне чи дорівнює нулю кожне із чисел a, b і c.

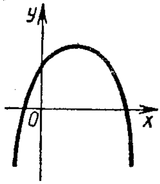

Рис. 14.3

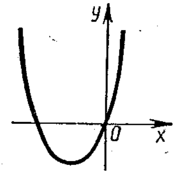

Рис. 14.4

14.141. Побудувати графік функції $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, якщо $a > 0$ і $b^2 - 4ac = 0$.

Знайти області визначення функцій (**14.142—14.147**):

14.142. $y = \dfrac{\lg x}{\arcsin(x - 3)}$. **14.143.** $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x^2}}$.

14.144. $y = \sqrt{\lg \dfrac{1 - 2x}{x + 3}}$. **14.145.** $y = (\log_3 x - \log_2 x)^{-1/2}$.

14.146. $y = \sqrt{2^x - 3^x}$. **14.147.** $y = \log_3 \log_{1/2} x$.

Знайти області значень функцій (**14.148—14.150**):

14.148. $y = \dfrac{\cos x}{\cos(x/2) - \sin(x/2)}$.

14.149. $y = (\sin x + \cos x)^2$.

14.150. $y = 5 \sin x - 12 \cos x$.

Зобразити в координатній площині xOy задані співвідношення між змінними x і y (**14.151—14.159**):

14.151 $|x| + |y| = 1$. **14.152.** $|x| - |y| = 1$.

14.153. $x + |x| = y + |y|$. **14.154.** $|y| = \log_{0,5} |x|$.

14.155. $|y| = |\sin x|$. **14.156.** $|y| = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

14.157. $3x - 4y + 12 > 0$ і $x + y - 2 < 0$.

14.158. $y + 3 \geqslant x^2 + 2x$ і $x + y \leqslant 3$.

14.159. $\log_2 (x + y - 1) < 0$.

14.160. На рис. 14.5 зображено графік $y = \log_a x$ (масштаби по осях координат однакові). За допомогою цього графіка знайти число a.

14.161. Знайти найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

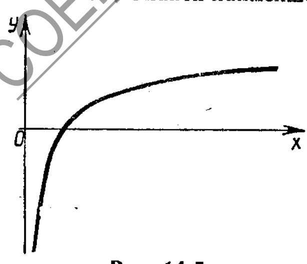

Рис. 14.5

14.162. Знайти найменше значення функції $y = \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{x^2}{2}$.

14.163. Знайти найбільше значення функції $y = 1 + 2x - x^2$.

14.164. Показати, що парабола $y = x^2 - x + 5{,}35$ не перетинає графік функції $y = 2 \sin x + 3$.

14.165. Показати, що координати всіх точок прямої $x + y = 2$ задовольняють нерівність $x^2 + y^2 \geqslant 2$, і пояснити цей факт геометрично.

Користуючись означенням факторіалу $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, скоротити дроби (14.166—14.169):

14.166. $\dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$. **14.167.** $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

14.168. $\dfrac{(n+2)\,n!}{(n+1)!}$. **14.169.** $\dfrac{((n+2)! + n!)\,(n+1)}{(n+2)!\,(n^2+3n+3)}$.

14.170. Показати, що графіком рівняння $\sin(x+y) = 0$ є нескінченна сукупність рівновіддалених паралельних прямих.

14.171. Дано:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число,} \\ -1, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.} \end{cases}$$

Чи є ця функція сталою, якщо x — дійсне число? А її квадрат?

14.172. Довести, що при деяких обмеженнях для α і β із рівності $\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta)$ випливає $\mathrm{tg}\,\alpha = 2\mathrm{tg}\,\beta$. Указати ці обмеження.

14.173. Визначити z, коли відомо, що $\mathrm{tg}\,\alpha = 3^z$, $\mathrm{tg}\,\beta = 3^{-z}$ і $\alpha - \beta = \pi/6$.

14.174. З'ясувати, чи є задана послідовність спадною, чи зростаючою: а) $x_n = 3n^2 - n$; б) $x_n = n^2 - 3n$; в) $x_n = 7n - n^2$; г) $y_n = \lg\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

14.175. Знайти цілі значення x, при яких справджується нерівність $\log_3 (x+3)^2 \leqslant 2$.

14.176*. Довести, що сума кубів n непарних чисел дорівнює $n^2(2n^2 - 1)$ при будь-якому натуральному n.

14.177. Розглянувши випадки $0 < a < 1$ і $a > 1$, з'ясувати, чи існує число $\sqrt{\log_a \mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \log_a \mathrm{tg}\,70^\circ}$.

14.178. Показати, що коли арифметичний квадратний корінь із добутку двох натуральних чисел є число раціональне, то і квадратний корінь із їхньої частки — число раціональне.

14.179. Не знаходячи x і y окремо, обчислити суму $x^3y + xy^3$, якщо $x - y = 4$ і $xy = 3$.

14.180. Якщо $\log_b a = m$ і $\log_c b = n$, то чому дорівнює $\log_{bc} ab$?

14.181. Довести, що нерівність $|\sin x + \sqrt{3}\cos x| \leqslant 2$ справджується для будь-якого дійсного значення x.

14.182. На числовій осі побудувати точки, які зображують числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ і $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

14.183. Що більше: 123 % від 456 чи 456 % від 123? Яку властивість процентів можна сформулювати, узагальнюючи відповідь на це запитання? Обгрунтувати цю властивість.

14.184. На деякий товар було двічі знижено ціни — спочатку на 15 %, а потім ще на 20 %. Який загальний процент зниження вартості товару?

14.185. Якщо середнє арифметичне десяткових логарифмів двох чисел дорівнює q, то чому дорівнює середнє геометричне кубів самих цих чисел?

14.186. З точністю до 0,01 знайти $2\sqrt{5{,}21}$.

14.187. Показати, що число $\sqrt{12345{,}67}$ ірраціональне.

14.188. Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$.

14.189. Що більше: а) $0{,}8^{-\sqrt{2}}$ чи $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3} 0{,}5$ чи $\log_3 0{,}5$?

14.190*. Скільки цифр має число 2^{100}?

14.191. Довести, що нерівність $3^n \geqslant n + 2$ справджується, якщо n — натуральне число.

14.192. Добуток $(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1)(2^{2^3} + 1)$ подати у вигляді суми степенів числа 2.

14.193. Через один кран вода рівномірно вливається в бак і заповнює його за 3 год, а через другий — за 5 год. За який час вода заповнить бак, якщо відкрити обидва крани одночасно?

14.194. Через один кран вода рівномірно вливається в бак і заповнює його за 3 год, а через другий кран вода рівномірно виливається і наповнений бак спорожнюється за 5 год. За який час вода заповнить порожній бак, якщо відкрити обидва крани одночасно?

14.195. Чи існує така арифметична прогресія, у якої сума будь-якої кількості її членів дорівнює: а) квадрату кількості членів; б) кубу кількості членів?

14.196. Поділити $a^{128} - b^{128}$ на добуток

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \ldots (a^{64} + b^{64}).$$

14.197. Показати, що рівняння $x^8 + p^2x^6 + q^2x^4 + r^2x^2 = 0$ не має коренів, які відрізняються від нуля.

14.198*. Многочлен $x^4 + 4$ записати у вигляді добутку двох многочленів другого степеня.

14.199*. Знайти добуток xy, якщо $x + y = a$ і $x^4 + y^4 = b^4$.

14.200*. Многочлен $x^8 + y^8$ подати у вигляді добутку двох многочленів четвертого степеня відносно x і y.

14.201*. Розкласти на множники $a^4 + 4b^4$.

14.202. Знайти коефіцієнти квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, знаючи, що при $x = -0{,}75$ вона набуває найбільшого значення 3,25, а при $x = 0$ дорівнює 1.

14.203. З усіх чотирикутників із заданими діагоналями m і n знайти чотирикутник, який має найбільшу площу.

14.204. Побудувати графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 1 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x < \pi, \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 & \text{при } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

Вказати значення функції в точці розриву.

14.205. Для яких значень x справджується рівність

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = \frac{1 + x^8}{1 - x}?$$

14.206. Довести, що многочлен $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 16$ набуває додатних значень при будь-яких дійсних значеннях x.

14.207. Довести, що жодне парне число, не кратне чотирьом, не можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел.

14.208. Розкласти на множники $x - 3\sqrt{xy} + 2y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

14.209. Знайти такі значення λ, при яких обидва корені тричлена $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 3)x + (\lambda - 2)$ будуть додатними.

14.210. Чи є число $2^{2001} + 1$ простим або складеним?

14.211. Дано правильний нескоротний дріб $\frac{p}{q}$. Довести, що з рівності $\frac{a}{q} + \frac{p}{q} = 1$ випливає, що $\frac{a}{q}$ — нескоротний дріб.

14.212. Неважко помітити, що рівність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

має відносно x степінь не вищий, ніж другий. Разом з тим вона має більше двох коренів: можна перевірити, що числа $x_1 = a$, $x_2 = b$ і $x_3 = c$ задовольняють її. Як це можна пояснити?

14.213*. Довести, що коли алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то вільний член рівняння ділиться на цей корінь.

14.214*. Як розв'язати рівняння $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$, якщо відомо, що многочлен у його лівій частині можна розкласти на множники другого степеня з цілими коефіцієнтами?

14.215. Дано добуток

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right).$$

Трапилося так, що в друкарні обидва дроби випали при складанні. Складач стверджує, що вираз

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

є тотожний даному. Чи це дійсно так?

14.216. При яких значеннях a графік функції $y = (a+5)x^2 + x + a - 3$ перетинає вісь абсцис з різних боків від осі ординат?

14.217. Вказати область визначення функції

$$y = \log_2 (x^2 - 2x + 3).$$

Чи має графік цієї функції яку-небудь вісь симетрії? Якщо має, то яку?

14.218. Вказати область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}.$$

Показати, що графік цієї функції розміщений симетрично відносно прямої $x = 5$.

14.219. Показати, що функція $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$ збігається з оберненою до неї.

14.220. Які з наступних функцій є парними, непарними або є ні парними, ні непарними:

а) $y = \sin^3 x + \operatorname{ctg}^5 x$; б) $y = \sin 2x + \cos 3x$;

в) $y = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; г) $y = \sin^4 x + x^2 + 1$;

д) $y = x\,|x|$; е) $y = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$;

є) $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$; ж) $y = \arccos 3x$;

з) $y = 5 \operatorname{arctg} x$; и) $y = -\operatorname{arcctg} x$.

14.221. Знайти значення функції $f(n) = \arcsin(\sin n)$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

14.222. Чи можна стверджувати, що сума двох періодичних функцій є періодичною функцією?

14.223. Довести, що добуток парного числа непарних функцій є парною функцією.

14.224*. Величина y є цілою частиною («характеристикою») логарифма x за основою 2. Побудувати графік y як функції x, коли x змінюється від 0,5 до 8,0.

14.225*. Довести, що коли p і q — прості числа, більші 3, то $p^2 - q^2$ ділиться на 24.

14.226. Довести, що коли куби двох дійсних чисел рівні між собою, то рівні і самі ці числа.

14.227. Чи завжди можна три довільних раціональних числа a, b і c розглядати як члени деякої арифметичної прогресії?

14.228. Дано $n < m$, де n і m — натуральні числа. В якій послідовності розміщено на числовій прямій точки, що зображують числа 1, n/m, m/n? Яка з двох останніх точок розміщена ближче до точки, що зображує 1?

14.229. Чому при діленні на 3 чисел, що дорівнюють квадрату цілого числа, в остачі ніколи не залишається 2?

14.230. Довести, що при будь-якому натуральному n вираз $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ є натуральним числом.

14.231. Довести, що коли кожне з двох заданих чисел є сумою квадратів двох чисел, то і добуток цих чисел можна подати у вигляді суми квадратів двох чисел.

14.232*. Довести, що коли n — просте число, більше 3, то $\frac{n^2-1}{24}$ є цілим числом.

14.233. Довести, що вираз $n^7 - n$, де n — будь-яке ціле число, ділиться на 42.

14.234 Довести, що

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

14.235. Довести, що

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14.236. Показати, що будь-яке непарне число можна подати у вигляді різниці квадратів двох цілих чисел.

14.237*. Використовуючи метод математичної індукції, довести справедливість нерівності $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (n — натуральне число, $n \geqslant 2$ і $a > -1$).

14.238*. Довести, що $|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$. На підставі цієї нерівності довести методом математичної індукції справедливість нерівності

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — дійсні числа.

14.239. Як можна використати тотожність $\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ для доведення нерівності

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}\ ?$$

14.240*. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2.$$

14.241. Виключити t з рівностей $x = 10^{\cos t}$, $y = 10^{\sin t}$.

14.242. Виключити φ з рівностей $u = 10^{\cos^2\varphi}$, $v = 10^{\sin^2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

14.243. Чому дорівнює сума чисел α і β, якщо $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ є коренями рівняння $6x^2 - 5x + 1 = 0$?

14.244. Для чисел α і β таких, що $0 < \alpha + \beta < \pi/2$, значення $\operatorname{ctg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\beta$ є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$ (передбачається, що обидва корені додатні). Знайти $\alpha + \beta$.

14.245. Виразити $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

14.246. Нехай $\sin 10° = a$. Знайти $\sin 20°$ двома способами: за формулою синуса подвійного кута і за формулою синуса різниці кутів $30°$ і $10°$. Чому здобуто «різні» відповіді?

14.247. За допомогою формули, що пов'язує $\sin 3\alpha$ і $\sin\alpha$, довести, що $0{,}1 < \sin 10° < 0{,}2$.

14.248. Довести, що сума $\sin^n x + \cos^n x$ тотожно дорівнює 1 лише при $n = 2$.

14.249. Значення функції $y = \sin^k x + \cos^k x$ на відрізку $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ порівняти з одиницею для $k = 0, 1, 2, 3$.

14.250. Показати, що $\sin 495° - \sin 795° + \sin 1095° = 0$.

14.251. Виразити $\sin^2 6°$ через $\sin 12°$.

14.252. Чи існує кут, для якого косинус дорівнював би:

а) $a + \dfrac{1}{a}$ при $a \neq 0$; б) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$?

14.253. Чи існує такий кут, для якого числа $2 + \sqrt{3}$ і $2 - \sqrt{3}$ є відповідно його тангенсом і котангенсом?

14.254. Визначити періоди функцій:

а) $y = \cos x + \sin\dfrac{x}{3}$; б) $y = \sin x + \cos\dfrac{x}{3} + \sin\dfrac{x}{5}$.

14.255. Визначити період функції $y = 15\sin^2 12x + 12\sin^2 15x$.

14.256. Побудувати гострий кут, тангенс якого у два рази більший за його синус.

14.257. Знайти $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

14.258. Довести, що $8\cos 20°\cos 40°\cos 80° = 1$.

14.259. При яких значеннях α і β виконується рівність $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$?

14.260. Знайти найбільше значення функції

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(2x + \frac{2\pi}{15}\right).$$

14.261. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = \sin(\sin x)$?

14.262. Знайти найменше і найбільше значення функції $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

14.263. Що більше: $\operatorname{tg} 1$ чи $\operatorname{arctg} 1$?

14.264. Чому дорівнює дріб $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = m$?

14.265. Обчислити $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha = -1/3$, $\cos\beta = -1/2$.

14.266. Визначити знак добутку $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5$.

14.267. Що менше: $\frac{\pi}{4}$ чи $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{5}{8}$?

14.268. Що менше: $\frac{\pi}{4}$ чи $\arcsin\frac{2}{3} + \arccos\frac{2}{3}$?

14.269. Знайти такі два числа m і M, щоб нерівність $m \leqslant \sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha \leqslant M$ була справедливою для будь-яких α і щоб різниця між M і m була найменшою.

14.270. Показати, що знаки $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ збігаються при будь-якому значенні $\alpha \neq k\pi$ (k — ціле).

14.271. Знайти такі значення a і b, при яких функція $y = (a-b)\sin^2 x + \frac{a+b}{2}\cos^2 x$ тотожно (для всіх значень x) дорівнює 2.

14.272. Чи можлива рівність $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt[3]{3}$?

14.273. Знак $\vee$ замінити на один із знаків $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ так, щоб наступні співвідношення були справедливими: а) $\lg\sin\alpha \vee 0$; б) $\sin\alpha + \cos\alpha \vee 1{,}5$; в) $\sqrt[3]{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} \vee 1$; г) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \vee 1{,}9$ (α — гострий кут).

14.274. Довести, що коли для трикутника виконується залежність $a/\cos A = b/\cos B$, то він рівнобедрений.

14.275. Довести, що коли відношення косинусів двох кутів трикутника дорівнює відношенню синусів тих самих кутів, то трикутник рівнобедрений.

14.276. Довести, що для будь-якого трикутника із сторонами a, b, c і кутами A, B, C, які лежать відповідно проти цих сторін, справедлива рівність

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

14.277. Довести, що коли у трикутнику $\frac{a-b}{a} = 1 - 2\cos C$, то трикутник рівнобедрений.

14.278. Нехай A, B, C — кути трикутника, причому C — тупий кут. Довести, що $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$.

14.279. Довести, що у будь-якому трикутнику сума попарних добутків котангенсів усіх кутів дорівнює одиниці.

14.280. Довести, що для будь-якого трикутника із сторонами a, b, c і кутами A, B, C його площу S можна визначити за формулою

$$S = \frac{1}{2}(abc)^{2/3}\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}.$$

Побудувати графіки функцій (14.281—14.298):

14.281. $y = |x-2|(x+2)$. **14.282.** $y = \frac{x-1}{|x-1|}(x^2-4)$.

14.283. $y = \sqrt{10^{\lg x^2}}$. **14.284.** $y = x^{\log_x 2}$. **14.285.** $y = 2^{\log_2 x}$.

14.286. $y = 2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$. **14.287.** $y = |x|^{1/2}$.

14.288. $y = 5^{\frac{1}{3}\log_5 (x-1)}$. **14.289.** $y = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

14.290. а) $y = x^2 - 7x + 6$; б) $y = |x|^2 - 7|x| + 6$;
в) $y = |x^2 - 7x + 6|$; г) $y = ||x|^2 - 7|x| + 6|$.

14.291. $y = \frac{x}{|x|} \sin 2x$. **14.292.** $y = \frac{2 - x}{|x + 1|}(x^2 - x - 2)$.

14.293. $y = \frac{x - 1}{|x - 3|}(x^2 - 9)$. **14.294.** $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$.

14.295. $y = \log_2 \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. **14.296.** $y = 0{,}5^{\frac{2x^2 - 6x}{x - 3}}$.

14.297. $y = \log_3 \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$. **14.298.** $y = \left| \log_2 \frac{x - 4}{x^2 - 16} \right|$.

14.299. Чи відрізняються один від одного графіки функцій $y = \lg x^2$ і $y = 2 \lg x$?

14.300. Побудувати на одному рисунку графіки функцій $y = \lg x^2$ і $y = \lg^2 x$.

14.301*. На вступних іспитах один із абітурієнтів запропонував таке розв'язання рівняння $\sin 2x + 7 \cos 2x + 7 = 0$: виразив $\sin 2x$ і $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ і дістав рівняння

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{7(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 7 = 0,$$

звідки знайшов $\operatorname{tg} x = -7$ і $x = \pi k - \operatorname{arctg} 7$. Чи все тут гаразд?

14.302. Знайти $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і α не належить першій чверті.

14.303. Обчислити $\sin(\arcsin(-1/2) - \arccos(-\sqrt{3}/2) + \operatorname{arctg}\sqrt{3})$.

14.304. Обчислити $\sin(\arcsin(3/5) + \arccos(1/3))$.

14.305. Цифри тризначного числа записано у зворотному порядку. Показати, що різниця між здобутим і даним числами ділиться на 9.

14.306. Знайти добуток $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \ldots \sqrt[512]{a}$.

14.307. Довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ y^{-1} + z^{-1} = 3, \\ z^{-1} + x^{-1} = 8 \end{cases}$$

не має дійсних коренів.

14.308. Припускаючи, що $a \neq 10^n$ (a і n — цілі), довести, що $\lg a$ — число ірраціональне.

14.309. Чи можлива рівність $x = \log_2 x$?

14.310. Розв'язати рівняння $\log_y x + \log_x y = 2$.

14.311. Для яких кутів першої чверті виконується нерівність $\sin \alpha \geqslant \sin 2\alpha$?

14.312. Показати, що сума квадратів двох непарних чисел не може бути квадратом цілого числа.

14.313. Знайти значення x, при яких усі значення функції $y = x^2 + 5x + 6$ належать проміжку [6; 12].

14.314. Довести, що коли квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ з цілими коефіцієнтами p і q має раціональні корені, то ці корені — цілі числа.

14.315. Не розв'язуючи рівняння $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} = 10$, показати, що воно не має коренів.

14.316. Вказати область визначення і область значень функції $y = \log_5 \sin x$.

14.317. Вказати область визначення функції $y = \sqrt{\log_3 \cos x}$.

14.318. При яких значеннях x має зміст рівність

$$\lg \frac{x(x-4)}{1-x} = \lg x + \lg (x-4) - \lg (1-x)?$$

14.319*. При яких значеннях x функція $y = |x-1| + |x-3|$ набуває найменшого значення? Знайти це значення.

14.320. Відомо, що дріб $\frac{a+b}{a-b}$ скоротний (a, b — цілі числа, $b \neq 0$, $a \neq b$). Чи скоротний дріб $\frac{a}{b}$?

14.321. Чи має рівняння $x^3 + 2x - 3 = 0$ від'ємні корені?

14.322. Многочлен $a^4 + 2a^3 + 6a - 9$ розкласти на множники.

14.323. Розв'язати рівняння $x^{1/\lg x} = 10$.

14.324. Розв'язати рівняння $x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1$.

14.325. Не використовуючи таблиці, обчислити $\lg \operatorname{tg} 22^\circ + \lg \operatorname{tg} 68^\circ$.

14.326. Довести, що сума трьох степенів числа 3 з натуральними, розміщеними підряд показниками, менший з яких не менше 2, ділиться без остачі на 117.

14.327. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

14.328. Обчислити $\log_{a_1 a_2 \ldots a_k} x$, якщо $\log_{a_1} x = b_1$, $\log_{a_2} x = b_2$, ..., $\log_{a_k} x = b_k$; $x \neq 1$.

14.329*. Скільки існує цілих чисел, у яких характеристика їхніх десяткових логарифмів дорівнює одному і тому числу:
а) n ($n \in \mathbb{N}$); б) $-m$ ($m \in \mathbb{N}$)?

14.330. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(x-a)(y-b) = c, \\ (x-a)/(y-b) = c.\end{cases}$$

14.331. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $\log_4 9$ і $\log_3 16$. Знайти площу трикутника.

14.332. Знайти найбільше значення функції $y = \frac{x^2}{x^4 + 25}$.

14.333. Знайти всі значення x, для яких існує сума $\log_{1/2} x + (\log_{1/2} x)^2 + \ldots + (\log_{1/2} x)^n + \ldots$.

14.334. Довести, що $x = 1$ — єдиний корінь рівняння $x^3 + 3x - 4 = 0$.

14.335. Який знак має число $\log_{\pi/4} \operatorname{tg} 1$?

14.336. Чи має розв'язок рівняння $\sin x = 2 \sin 47° \cos 44°$?

14.337. Розв'язати рівняння $\dfrac{4}{\sqrt[5]{(11x-1)^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}{4}$.

14.338. Показати, що координати лише однієї точки площини задовольняють рівняння $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$, і знайти цю точку.

14.339. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + z = 2, \\ -x + y + z = 4. \end{cases}$$

14.340. Показати, що рівняння $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ має лише один корінь. Який?

14.341. Многочлен $k^5 + k^4 - 2k^3 - 2k^2 + k + 1$ розкласти на множники.

14.342*. Розв'язати рівняння $\cos 2x = x^2 + 1$.

14.343. Знайти найбільше значення функції $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$.

14.344. Знайти найбільше значення функції $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$.

14.345*. Знайти суму

$$4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \dots + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \dots$$

14.346. Розв'язати рівняння $\cos(\pi x^2) = -1/2$.

14.347. Розв'язати рівняння $\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

14.348. При яких значеннях a рівняння $1 + \sin^2 ax = \cos x$ має єдиний розв'язок?

14.349. Число членів геометричної прогресії парне. Сума всіх її членів у три рази більша за суму членів, розміщених на непарних місцях. Визначити знаменник прогресії.

14.350. Знайти $1 + 2^x + 2^{2x} + \dots + 2^{kx} \dots$, якщо k — ціле натуральне, а $x < 0$.

14.351. Не перетворюючи рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 17$, показати, що воно не має коренів.

14.352. Нехай A, B, C — кути трикутника. Показати, що $\sin A \sin B - \cos C = \cos A \cos B$.

14.353. Дано рівняння $3 \sin 2x + \cos 2x = 4$. Чи має воно розв'язок?

14.354. При яких значеннях k корені рівняння $x^2 - (2k+1)x + k^2 = 0$ відносяться як $1 : 4$?

14.355. При яких значеннях a рівняння $x^2 - 2x - \log_3 a^2 = 0$ має корені?

14.356. Скласти біквадратне рівняння, якщо числа $\sqrt{3} - 1$ і $\sqrt{3} + 1$ є двома його коренями.

14.357. Розв'язати рівняння $3^{2+\log_9 25} = 5 \cdot 9^{2/x}$.

14.358. Вказати найменше значення функції

$$y = \log_2(x^2 - 4x + 20).$$

14.359. Чи може синус якого-небудь кута дорівнювати

а) $\lg a + \frac{1}{\lg a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

б) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{-1}$; в) $\cos 40° + \cos 50°$?

14.360. Не використовуючи таблиці, знайти $c = \sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, якщо $\lg a = -0{,}6498$, а $\lg b = 13{,}9170$.

14.361. Виразити $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$ і за допомогою здобутої формули обчислити $\sin 54°$, коли відомо, що $\sin 18° = (\sqrt{5}-1)/4$.

14.362. Знайти x із умов $\operatorname{tg} \alpha = (3+\sqrt{x})/2$, $\operatorname{tg} \beta = (3-\sqrt{x})/2$, $\alpha + \beta = \pi/4$.

14.363. Розв'язати рівняння $x^2 \cdot 2^x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$.

14.364. При яких значеннях m може виконуватися рівність $\cos \varphi = \frac{m^2 - 4m - 4}{m^2 + 1}$, якщо $0 < \varphi < \pi/3$?

14.365. При яких значеннях a виконується рівність $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2a^2 + 2a}{a^2 - 6a + 9}$, якщо $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$?

14.366. Показати, що коли $x = a \cos \alpha \sin \beta$, $y = a \sin \alpha \sin \beta$, $z = a \cos \beta$, то $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

14.367. Знайти добуток коренів рівняння $z^{\log_5 3z} = 25\sqrt[3]{z^4}$.

14.368. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ є найменшою?

14.369. Скласти рівняння параболи з віссю, паралельною осі ординат, якщо ця парабола проходить через точки $(-2; -3)$, $(-1; 2)$ і $(1; 0)$. Показати, що вона перетинає вісь абсцис з різних боків від осі ординат.

14.370. В яких точках графік функції $y = \sqrt{-x+9} - \sqrt{-x+4}$ перетинається з прямою $y = 1$?

14.371. Знайти цілі значення x, що задовольняють нерівність $0{,}000729^3 < 0{,}3^{x^2-5x+4} < 11\frac{1}{9}$.

14.372. Знайти невід'ємні розв'язки нерівності

$$\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}} < \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{7,5} 0,5}.$$

Для яких значень x виконуються рівності (14.373—14.376):

14.373. $|x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12$.

14.374. $\left|\frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 10x + 24}\right| = \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 10x + 24}$.

14.375. $\left|\frac{x^3}{x^2 - 1}\right| = \frac{x^3}{1 - x^2}$.

14.376. $|\lg^2 (1 - 9x) + \lg (1 - 9x) - 2| = 2 - \lg (1 - 9x) - \lg^2 (1 - 9x)$.

14.377. Знайти натуральне значення k із умови

$$2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdots 2^{2k} = 0{,}25^{-28}.$$

14.378. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x - 3\,|x + 1| + 3 = 0$.

14.379. Розв'язати рівняння: а) $|x + 1| + |x - 1| = 2x^3$; б) $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$.

Розв'язати нерівності (14.380—14.383):

14.380. $|x + 1| > 2\,|x + 2|$.

14.381. $\log_2 (x + 1) > \log_{x+1} 16$.

14.382. $\log_{0,5} (2^x - 1) > x - 1$. **14.383.** $\log_{x-3} (x - 1) < 2$.

14.384. Розв'язати систему нерівностей $\frac{1}{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|} < 1$.

14.385. Показати, що система рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\log_2 x} - 3^{\log_3 y} = 1, \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

не має розв'язків.

14.386. Знайти цілі значення x, які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} (\log_3 x)^{\log_9 x} \leqslant 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

14.387. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3\,|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{cases}$$

14.388. Довести, що функція $f(x) = \lg (x + \sqrt{1 + x^2})$ є непарною.

14.389. При яких значеннях x функція $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$ набуває найменшого значення? Знайти це значення.

14.390. Знайти найбільше значення функції $y = \sin x + \cos x$. При яких значеннях x воно досягається?

14.391. Показати, що графік функції $y = \frac{\lg 5 + \lg (x^2 + 1)}{\lg (x - 2)} - 2$ в жодній точці не перетинає вісь Ox.

14.392. На графіку функції $y = 0,8\,|x| \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ знайти точку, ордината якої у два рази більша за її абсцису (графік можна не будувати).

14.393. Довести, що графіки функцій $y = 4^x - 3 \cdot 2^x$ і $y = -(5 \times 2^{-x} + 1)$ не мають спільних точок.

14.394. Знайти точки перетину параболи $y = x^2 + 1$ і кривої $y = |3x^2 - 5|$.

14.395. Знайти точки перетину кривої $y = 12x^2 - 5\,|x| - 36$ і параболи $y = 6x^2 - 5x - 12$.

14.396. Для яких значень x графік функції $y = x + 3 + \sqrt{(x + 1)(x + 7)}$ розміщується нижче осі абсцис?

14.397. Визначити, при якому значенні k графік функції $y = \lg kx - 2 \lg (x + 1)$ має лише одну спільну точку з віссю абсцис.

14.398. Вказати всі точки на осі Ox, в яких функція $y = \sqrt{3 \cdot 81^{1/x} - 10 \cdot 9^{1/x} + 3}$ не визначена.

14.399. При яких значеннях x графік функції $y = 0,7^{\lg(x^2 - 8x + 8)}$ розміщується не нижче прямої $y = 1$?

14.400. Знайти значення x, при яких графік функції $y = \log_{1/3}(x^2 - 8x) + 2$ розміщується не нижче осі абсцис.

14.401. В яких точках графік функції

$$y = \log_3 (\sqrt{x^2 + 21} - \sqrt{x^2 + 12})$$

перетинає вісь Ox?

14.402. Знайти точку перетину графіка функції $y = 3{,}6^{1+\log_{3,6}(10+x))\log_6(5-x)}$ з віссю ординат.

14.403. Знайти точку перетину графіків функцій $y = \log_2 (x + 14)$ і $y = 6 - \log_2 (x + 2)$.

14.404. Знайти абсцису тієї точки графіка $y = \log_2 \log_6 (2^{\sqrt{x}+1} + 4)$, ордината якої дорівнює одиниці.

14.405. Знайти точки перетину графіка функції $f(x) = x^{\lg x} - 100000\, x^4$ з віссю абсцис.

14.406. Знайти цілі значення x, які належать області визначення функції

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\lg(-3x^2 + 10x - 3)}.$$

Знайти області визначення функції (**14.407—14.410**):

14.407. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^4 - 9x^2}}$.

14.408. $f(x) = \sqrt{\log_x 2 - \log_2 x}$.

14.409. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{1 - 3x + 2x^2}}$.

14.410. $f(x) = \sqrt{1 - \lg(x - 1)} + \sqrt{\dfrac{4 - x}{x + 2}}$.

Глава 15

ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Таблиця похідних та первісних деяких функцій
(a, b — сталі)

Первісна $F(x)$	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$
ax	a	0
$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$, $p \neq -1$	x^p, $p \in R$	px^{p-1}
$\dfrac{a^x}{\ln a}$	a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x	e^x

Первісна $F(x)$	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$
—	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
—	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
—	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
—	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F(ax+b)$, $a \neq 0$	$f(u) = f(ax+b)$	$af'(u) = af'(ax+b)$

Основні формули

1°. Правила диференціювання (u, v — функції; c — стала):

$$(cu)' = cu'; \quad (15.1) \qquad (u+v)' = u' + v'; \quad (15.2)$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad (15.3) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (15.4)$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x), \quad (15.5)$$

де $g(f(x))$ — складна функція.

2°. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (15.6)$$

де $(x_0; y_0)$ — точка дотику.

3°. Правила знаходження первісних:

а) якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F + G$ є первісною для $f + g$;

б) якщо F — первісна для f, а k — стала, то kF є первісною для kf;

в) якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, а $k \neq 0$ і b — сталі, то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$.

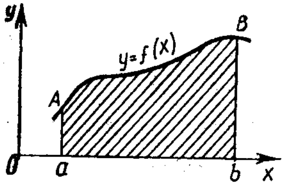

Рис. 15.1

4°. Формула Ньютона — Лейбніца має вигляд

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (15.7)$$

5°. Площа криволінійної трапеції $aABb$ (рис. 15.1), обмежена віссю Ox, прямими $x = a$ і $x = b$ та графіком невід'ємної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$, визначається за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (15.8)$$

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{2x-4}$.

$\triangle$ Функція $f(x) = \dfrac{x^3-8}{2x-4}$ у точці $x = 2$ не визначена. Розклавши чисельник на множники за формулою (2.14), запишемо цю функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}.$$

В області визначення функції $f(x)$ вираз $x - 2 \neq 0$, тому дріб можна скоротити на $x - 2$. Тоді

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{2} = f(2) = 6. \ \blacktriangle$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$.

$\triangle$ Функція $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$ у точці $x = 4$ не визначена. Помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2-7} + 3 \neq 0$ та використавши формулу (2.8), перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-7-9}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3} =$$

$$= f(4) = \frac{4}{3}. \ \blacktriangle$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2}$ у точці його перетину з віссю ординат.

$\triangle$ Згідно з формулою (15.6), рівняння дотичної запишемо у вигляді $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, де $(x_0;\ y_0)$ — точка дотику. Абсциса x_0 точки перетину графіка з віссю Oy дорівнює 0, а ордината $y_0 = f(0) = -2$. Отже, $(0;\ -2)$ — точка дотику. Далі, використовуючи формулу (15,4) і таблицю похідних, дістаємо

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+4)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2},$$

звідки $f'(0) = -1$. Отже, шукане рівняння дотичної має вигляд $y-(-2) = -1\cdot(x-0)$, або $y = -x-2$. ▲

Приклад 4. Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2}$.

△ Область визначення функції — вся числова вісь, крім точки $x = 0$. Використовуючи формулу (15.4) і таблицю похідних, знаходимо

$$f'(x) = \frac{2(x-2)x^2-(x-2)^2 2x}{x^4} = \frac{4(x-2)}{x^3};$$

$f'(x) = 0$ лише при $x = 2$. Складемо таблицю:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	↘		↗

Отже, $x = 2$ — точка мінімуму; функція зростає на $(-\infty;\ 0)$ і на $(2;\ \infty)$, спадає на $(0;\ 2)$. ▲

Приклад 5. Знайти найменше і найбільше значення функції $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ на проміжку $[0;\ 3\pi/2]$.

△ Спочатку знайдемо значення $f(x)$ на кінцях даного проміжку: $f(0) = 0$, $f(3\pi/2) = -2$, а потім — критичні точки, що належать цьому проміжку. Маємо $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$; $f'(x) = 0$, якщо $\cos x + \cos 2x = 0$, звідки $2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2} = 0$. Із рівняння $\cos\frac{3}{2}x = 0$ знаходимо $\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, тобто $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, а з рівняння $\cos\frac{x}{2} = 0$ дістанемо $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, тобто $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Другий розв'язок є частиною першого. Отже, розв'язок рівняння має вигляд $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Проміжку $[0;\ 3\pi/2]$ належать точки $x_1 = \pi/3$ і $x_2 = \pi$. Знаходимо значення $f(x)$ у критичних точках: $f(\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$, $f(\pi) = 0$. Порівнюючи між собою числа $f(0)$, $f(3\pi/2)$, $f(\pi/3)$, $f(\pi)$, робимо висновок, що $\min\limits_{[0;3\pi/2]} f(x) = -2$, $\max\limits_{[0;3\pi/2]} f(x) = 3\sqrt{3}/2$. ▲

Приклад 6. В арифметичній прогресії шостий член дорівнює 3, а різниця прогресії більше 0,5. При якому значенні різниці цієї прогресії добуток першого, четвертого і п'ятого її членів є найбільшим?

△За умовою $a_6 = a_1 + 5d = 3$, звідки $a_1 = 3 - 5d$. Позначимо добуток $a_1a_4a_5$ через y. Тоді $y = a_1(a_1+3d)(a_1+4d) = -10d^3 + 51d^2 - 72d + 27$. Для відшукання значення d, при якому функція

y набуває найбільшого значення, спочатку знайдемо похідну $y' = -30d^2 + 102d - 72 = -6(5d^2 - 17d + 12)$, а потім, розв'язавши рівняння $5d^2 - 17d + 12 = 0$, знайдемо його корені $d_1 = 1$, $d_2 = 2{,}4$. Оскільки за умовою $d > 0{,}5$, то дослідимо поведінку функції y на інтервалі $(0{,}5; \infty)$. Складемо таблицю:

d	$(0{,}5;\ 1)$	1	$(1;\ 2{,}4)$	2,4	$(2{,}4;\ \infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

На інтервалі $(0{,}5; \infty)$ є лише одна точка максимуму функції y, а саме $d = 2{,}4$. Це означає, що на інтервалі $(0{,}5; \infty)$ функція y досягає найбільшого значення при $d = 2{,}4$. ▲

Приклад 7. Площа поверхні сфери дорівнює 27π. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, вписаного в цю сферу.

△ Нехай циліндр утворено в результаті обертання прямокутника $ABCD$ навколо діаметра MN (рис. 15.2). Поклавши $AD = x$, запишемо об'єм V циліндра як функцію від x. Маємо $S_{\text{сфери}} = 4\pi OB^2$, тобто $4\pi OB^2 = 27\pi$, звідки $OB^2 = 27/4$. Далі, із трикутника AOB дістаємо $AB^2 = OB^2 - OA^2$, тобто $AB^2 = \frac{27}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{27 - x^2}{4}$. Згідно з формулою (11.17), об'єм циліндра

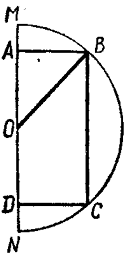

Рис. 15.2

$$V(x) = \pi AB^2 \cdot AD = \pi \frac{(27 - x^2)}{4} x = \frac{\pi}{4}(27x - x^3).$$

За змістом задачі $0 < x < 2OB$, тобто $0 < x < 3\sqrt{3}$. Маємо $V'(x) = \frac{\pi}{4}(27 - 3x^2) = \frac{3}{4}\pi(9 - x^2)$; $V'(x) = 0$, якщо $9 - x^2 = 0$. Звідси знаходимо $x = 3$ (оскільки $x > 0$). Якщо $0 < x < 3$, то $V'(x) > 0$, а якщо $3 < x < 3\sqrt{3}$, то $V'(x) < 0$. Отже, $x = 3$ — точка максимуму. Оскільки функція $V(x)$ визначена для будь-якого x і на всій числовій прямій має одну критичну точку, робимо висновок, що при $x = 3$ функція $V(x)$ досягає найбільшого значення. ▲

Приклад 8. Для функції $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ знайти первісну $F(x)$ за умови, що графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ перетинаються у точці, що лежить на осі Oy.

△ Оскільки для функції $\sin x$ однією з первісних є $-\cos x$, то, згідно з правилами п. 3°, первісною функції $2\sin 5x$ є $-\frac{2}{5}\cos 5x$. Первісною функції $\sqrt{x} + \frac{3}{5}$ є $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x$. Тоді для $f(x)$ первісною функцією є $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + C$ при довільному значенні сталої C. Необхідно знайти таке значення C, при якому графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$ перетинаються у точці, що лежить на осі Oy. Це означає, що при $x = 0$ має виконуватися рівність $F(0) = f(0)$. Але $F(0) = -\frac{2}{5} + C$, а $f(0) = \frac{3}{5}$. Отже, $-\frac{2}{5} + C = \frac{3}{5}$, звідки $C = 1$. Шукана первісна має вигляд $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + 1$. ▲

Приклад 9. Знайти площу замкненої фігури, обмеженої графіками функцій $y = -x^3$, $y = \frac{8}{3}\sqrt{x}$ і $y = 8$.

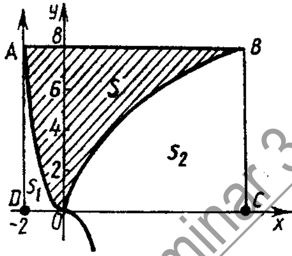

Рис. 15.3

△ Графіки заданих функцій зображено на рис. 15.3. Треба знайти площу S фігури OAB (на рисунку вона заштрихована).

Очевидно, що шукана площа дорівнює різниці між площею прямокутника $ABCD$ та площами S_1 і S_2 двох криволінійних трикутників OAD і OBC. Знайдемо координати точок A і B. Розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} y = -x^3, \\ y = 8 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = \frac{8}{3}\sqrt{x}, \\ y = 8, \end{cases}$$

дістанемо $A(-2; 8)$ і $B(9; 8)$. Далі маємо $C(9; 0)$, $D(-2; 0)$, $CD = 11$, $BC = 8$, звідки $S_{ABCD} = 11 \cdot 8 = 88$. Площі криволінійних трикутників OAD і OBC знаходимо за допомогою інтеграла за формулою (15.8):

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (-x^3)\,dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} = 4, \quad S_2 = \frac{8}{3}\int_{0}^{9} \sqrt{x}\,dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_{0}^{9} = 48.$$

Отже, $S = S_{ABCD} - S_1 - S_2 = 88 - 4 - 48 = 36$ кв. од. ▲

Обчислити (15.001—15.010):

15.001. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$. **15.002.** $\lim\limits_{x\to 0,5} \frac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

15.003. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

15.004. $\lim\limits_{x\to 2/5} \frac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

15.005. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$.

15.006. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}$.

15.007. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

15.008. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

15.009. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

15.010. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

Обчислити границі та довести або спростувати дані твердження (15.011—15.018):

15.011. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{3x-9} = 5 + \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{8-x^3}$.

15.012. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1} > \lim\limits_{x\to -0,5} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$.

15.013. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} < \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$.

15.014. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} < \cos\dfrac{\pi}{10}$.

15.015. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6} > \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$.

15.016. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-1} \cdot \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2} < 0$.

15.017. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$.

15.018. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x(x^2-4)} - \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4} = 1$.

Знайти похідні функцій (15.019—15.033):

15.019. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$.

15.020. а) $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$; б) $y = \dfrac{x^3-3x^2+1}{x-1}$.

15.021. а) $y = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; б) $y = \lg\dfrac{10-x}{x+2}$.

15.022. а) $y = \sqrt[3]{4x^3-7x^2+1}$; б) $y = (\sin^2 x + 1)\,e^x$.

15.023. а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot (x^4 - 1)$; б) $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$.

15.024. а) $y = e^{x^3 - 5x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$.

15.025. а) $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$.

15.026. а) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$; б) $y = x + \sin x \cos x$.

15.027. а) $y = \cos^2 3x$; б) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

15.028. а) $y = \operatorname{tg} \sin x$; б) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$.

15.029. $y = \frac{2}{3}\left(x^3 - \sqrt{(x^2-1)^3}\right) - x$.

15.030. а) $y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; б) $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}$.

15.031. а) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$.

15.032. а) $y = (x^3+1)\cos 2x$; б) $y = \sin 2x \operatorname{tg} x$.

15.033. а) $y = x\sqrt[3]{3x^2+1}$; б) $y = \sin\frac{\pi}{10} - \ln\frac{3}{x}$.

15.034. Розв'язати рівняння $f'(x) - \frac{2}{3} \cdot f(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 \ln x$.

15.035. Розв'язати нерівність $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$, $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$.

15.036. Розв'язати нерівність $f'(x) + \varphi'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$.

15.037. Розв'язати рівняння $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Обчислити значення похідних заданих функцій за вказаними значеннями незалежної змінної (15.038—15.059):

15.038. $f(x) = \sqrt{x^2+3} + \frac{2x}{x+1}$; $f'(1) = ?$

15.039. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2) = ?$

15.040. $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$; $f'(3) = ?$

15.041. $f(x) = x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3}$; $f'(-1) = ?$

15.042. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \dfrac{1}{x+1}$; $f'(1) = ?$

15.043. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; $f'(0) = ?$

15.044. $f(x) = \sin 4x \cos 4x$; $f'(\pi/3) = ?$

15.045. $f(x) = \sin^2 x^2$; $f'(0) = ?$

15.046. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; $f'(\pi/2) = ?$

15.047. $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$; $f'(\pi/12) = ?$

15.048. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2) = ?$

15.049. $f(x) = 5(x+1)^2 \sqrt[5]{x-1}$; $f'(2) = ?$

15.050. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}$; $f'(1) = ?$

15.051. $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin x \operatorname{tg} 2x$; $f'(\pi/2) = ?$

15.052. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$; $f'(0) = ?$

15.053. $f(x) = \dfrac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$; $f'(0) = ?$

15.054. $f(x) = \sin^3 \dfrac{x}{2}$; $f'(\pi/2) = ?$

15.055. $f(x) = 2^{x-2x^2-1}$; $f'(0) = ?$

15.056. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$; $f'(0) = ?$

15.057. $f(x) = (x^2 - x) \cos^2 x$; $f'(0) = ?$

15.058. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$; $f'(\pi) = ?$

15.059. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sin^2 x}$; $f'(\pi/2) = ?$

15.060. Знайти другу похідну функції $f(x)$ та обчислити її значення при вказаному значенні x:

а) $f(x) = x^2 \ln x + \cos 2x$; $f''(1) = ?$ $f''(\pi) = ?$

б) $f(x) = \sin \dfrac{x}{3} + x \ln x^2$; $f''(3) = f''(\pi/2) = ?$

15.061. З'ясувати знак похідної функції $y = \sqrt{4x+9}\,(x^2 - 16)$ у точці $x = 0$.

15.062. Дано функцію $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$. Як змінюється її похідна із зростанням x від $1/16$ до 81?

15.063. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x(\ln x - 1)$ у точці $x_0 = e$.

15.064. Дано функцію $y = x^4 - 6x^2 + 1$. Знайти найбільше та найменше значення її похідної на проміжку $[-1; 3]$.

15.065. Дано функцію $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Знайти область значень $f'(x)$.

15.066. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \operatorname{tg} 3x$ у точці $x_0 = \pi/3$.

15.067. Довести, що функція $f(x) = (x + 3)/(x - 5)$ спадає на всіх інтервалах області визначення.

15.068. Дано функцію $f(x) = x \ln x - x$. Як змінюється її дотична із зростанням x від 1 до 9?

15.069. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{4 + 3x - x^2}$ та область визначення її похідної.

15.070. Дано: $f(x) = 0{,}5\sqrt{x^3 + 1}$ і $g(x) = xe^{-x}$. Показати, що $f'(2)$ є коренем рівняння $g'(x) = 0$.

15.071. Функцію задано формулою $f(x) = e^{ax^2+bx+1}$. Знайти значення сталих a і b, якщо $f(1) = f(0) = f'(0)$.

15.072. Під яким кутом до осі Ox нахилена дотична до графіка функції $g(x) = x^2 \ln x$ у точці $x_0 = 1$?

15.073. Функцію задано формулою $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$. Розв'язати рівняння $f'(0) = f'(x)$.

15.074. Функцію задано формулою $f(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$. Розв'язати рівняння $f'(x) = 2f(x)$.

15.075*. Чи можна почленно диференціювати нерівність?

15.076. Дано функцію $f(x) = |x|$. Записати вираз первісної функції.

15.077. Знайти диференціальне рівняння гармонічного коливання: а) $y = -4\sin(2x + 3)$; б) $y = 3{,}8\cos(0{,}6x - 10)$.

15.078. Знайти відмінний від нуля розв'язок диференціального рівняння: а) $y' = -36y$; б) $y'' = -36y$.

15.079. Побудувати окремо графіки функцій $f(x) = x$, $\varphi(x) = |x|$ і $g(x) = x|x|$ в околі точки $x = 0$. Не зважаючи на те, що $f(x)$ диференційовна при $x = 0$, а $\varphi(x)$ ні, їхній добуток $g(x) = x|x|$ має похідну у точці $x = 0$. Обґрунтувати справедливість цих тверджень та знайти $g'(0)$.

15.080. Довести, що функція $f(x) = x + \sin x$ не спадає у кожній точці осі Ox.

15.081*. Показати, що при будь-яких значеннях сталих p і q ($p \neq q$) функція, задана формулою

$$f(x) = \begin{cases} p\cos x + q\sin x & \text{при } x \geqslant 0, \\ px + q + 1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

не диференційовна у точці $x = 0$.

15.082. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt[3]{t^2}$. Показати, що її прискорення обернено пропорційне квадрату пройденого шляху.

15.083. Дано функцію $f(x) = 0{,}5(x^2 - \cos x)$. Використовуючи властивість неперервності, з'ясувати, чи мають рівняння $f(x) = 7{,}8$ та $f'(x) = 7{,}8$ хоча б по одному кореню на проміжку $[2\pi; 3\pi]$.

15.084. Знайти всі значення сталої a, при яких похідна функції, заданої формулою $y = e^{ax^3+3x^2+x}$, набуває лише додатних значень на всій області визначення даної функції.

15.085*. Знайти суму $x + x^2 + \ldots + x^n$, а потім суму $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

15.086. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = (x^3 + 1)/3$ у точці її перетину з віссю абсцис.

15.087. На графіку функції $y = x(x-4)^3$ знайти точки, в яких дотичні паралельні осі абсцис.

15.088. Показати, що дотичні, проведені до графіка функції $y = (x-4)/(x-2)$ у точках його перетину з осями координат, паралельні між собою.

15.089. Визначити, під яким кутом синусоїда $y = (1/\sqrt{3}) \sin 3x$ перетинає вісь абсцис на початку координат.

15.090. Показати, що на графіку функції $y = x^3 + x^2 + x + 1$ немає точок, в яких дотичні паралельні осі абсцис.

15.091. В яких точках дотичні до кривої $y = (1/3) x^3 - x^2 - x + 1$ паралельні прямій $y = 2x - 1$?

15.092. В яких точках дотична до графіка функції $f(x) = (1/3) x^3 - (5/2) x^2 + 7x - 4$ утворює з віссю Ox кут 45°?

15.093. Під яким кутом до осі Ox нахилено дотичну, яка проведена до кривої $y = 2x^3 - x$ у точці її перетину з віссю Oy?

15.094. Під яким кутом до осі Ox нахилено дотичну, яка проведена до кривої $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ у точці $M_0(2; -4)$?

15.095. Відомо, що пряма $y = -(3/4)x - 3/32$ є дотичною до лінії, заданої рівнянням $y = 0{,}5x^4 - x$. Знайти координати точки дотику.

15.096. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 e^{-x}$ у точці $x = 1$.

15.097. Скласти рівняння дотичних до кривих $y = 2x^2 - 5$ та $y = x^2 - 3x + 5$, які проходять через точку перетину цих кривих.

15.098. Знайти кут, який утворює з віссю ординат дотична до кривої $y = (2/3) x^5 - (1/9) x^3$, проведена у точці з абсцисою $x = 1$.

15.099*. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, які проходять через точку $M(2; -5)$. Зробити рисунок.

15.100. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \ln(2e - x)$ у точці $x = e$.

15.101. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці $x = -2$.

15.102. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ дорівнює 3?

15.103. В яких точках дотична до графіка функції $y = (x+2)/(x-2)$ утворює з віссю Ox кут 135°?

15.104. Дано функцію $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Треба: а) скласти рівняння дотичної до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = \pi/6$ (остаточні числові значення заокруглювати до другого десяткового знака); б) встановити, в яких точках проміжку $0 \leqslant x \leqslant \pi$ дотична до графіка даної функції утворює з віссю Ox кут 60°.

15.105. Дано функцію $f(x) = \dfrac{2}{3} \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Треба знайти: а) кут, утворений з віссю Ox дотичною до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = \pi/3$; б) точки мінімуму на проміжку $[0; \pi]$.

15.106*. У точці перетину графіків функцій $y = 6/\sqrt{x}$ і $y = 12x^{-1/2} - 2x^{1/2}$ проведено дотичну до кожного графіка. Знайти різницю кутів, утворених цими дотичними з додатним напрямом осі Ox.

15.107. У точці M (1; 8) до кривої $y = \sqrt{(5 - x^{2/3})^3}$ проведено дотичну. Знайти довжину її відрізка, який міститься між осями координат.

15.108. Знайти площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичною до кривої $y = \sqrt{x^2 - 5}$ у точці M (3; 2).

15.109*. До гіперболи $y = 4/x$ проведено дотичні: одну — у точці M (2; 2), а інші — паралельно прямій $y = -4x$. Знайти площі трикутників, утворених кожною з цих дотичних з осями координат.

15.110*. Відрізок довільної дотичної до кривої $y = x^2$, що міститься між точкою дотику і віссю Ox, спроектовано на вісь Ox. Показати, що ця проекція вдвічі більша за проекцію аналогічного відрізка дотичної до кривої $y = x^4$ з тією самою абсцисою точки дотику.

15.111*. У довільній точці кривої $y = \sqrt{2x - x^2}$ проведено дотичну. Показати, що довжина відрізка дотичної від точки дотику до перетину з віссю Oy дорівнює ординаті точки перетину.

У задачах **15.112—15.115** вказано закон прямолінійного руху $s(t)$; s і t вимірюються відповідно у метрах та секундах.

15.112. $s(t) = \dfrac{4t + 3}{t + 4}$. Знайти швидкість в момент $t = 9$.

15.113. $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$. Знайти швидкість та прискорення в момент $t = 2$.

15.114. $s(t) = 0{,}5t^4 - 5t^3 + 12t^2 - 1$. В які моменти часу прискорення руху тіла дорівнює нулю?

15.115. $s(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}3t^5$. В який момент часу тіло має найбільшу швидкість? Знайти цю швидкість.

15.116. Рух двох матеріальних точок вздовж прямої задано рівняннями $s_1 = 4t^2 + 2$, $s_2 = 3t^2 + 4t - 1$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Знайти швидкість руху точок у ті моменти, коли відстані, які вони пройшли, однакові.

15.117. Прямолінійні рухи двох матеріальних точок задано рівняннями $s_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $s_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Знайти прискорення точок у той момент, коли їхні швидкості рівні між собою.

15.118. Дві точки рухаються по осі Ox. Координата x_1 першої точки визначається за формулою $x_1 = 3t^2 - 5$, координата x_2 другої точки — за формулою $x_2 = 3t^2 - t + 1$ (x_1, x_2 — в метрах, t — в секундах). Знайти швидкості руху точок у той момент, коли координати точок однакові.

15.119. Тіло, випущене вертикально вгору, рухається за законом $h(t) = 8t - 5t^2$ (h — в метрах, t — в секундах). Знайти швидкість тіла в момент зіткнення з землею (прискорення g вважати рівним 10 м/с²).

15.120. Точка з масою m_0 рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2/(2t - 1)$. Довести, що сила, яка діє на тіло, пропорційна кубу пройденого шляху.

15.121. Тіло з масою m_0 рухається прямолінійно за законом $s(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ (α, β, γ — сталі). Довести, що сила, яка діє на тіло, стала.

15.122. Радіус кулі r рівномірно зростає із швидкістю 2 см/с. З якими швидкостями зростають поверхня і об'єм кулі? Знайти ці швидкості в момент, коли r досягає 10 см (при $t = 0$ величина $r = 0$).

15.123. Кут α, на який повернеться колесо через проміжок часу t, дорівнює $\alpha = 3t^2 - 12t + 36$ (α — в радіанах, t — в секундах). Знайти кутову швидкість ω в момент $t = 4$ і визначити, в який момент часу колесо зупиниться.

15.124. У тонкому неоднорідному стержні 25 см завдовжки маса (у грамах) розподіляється за законом $g(l) = 4l^2 - 2l$, де l — відстань у сантиметрах від початку стержня до будь-якої його точки. Знайти густину стержня на відстані 4 см від початку стержня і середню густину стержня.

15.125. Функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$. Показати, що ця функція зростає у будь-якій точці, що належить області її визначення.

15.126. Функцію задано формулою $y = \sqrt{ax^3 - 6x^2 + 3x}$. Знайти всі значення сталої a, при яких дана функція визначена і зростає при всіх $x > 0$.

Знайти точки екстремуму функцій (15.127—15.130):

15.127. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **15.128.** $y = \dfrac{\ln x + 2}{x}$.

15.129. $y = x^2 e^{-x}$. **15.130.** $y = x^3 e^{-x}$.

15.131. Знайти екстремум функції $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

15.132. Знайти точки екстремуму функції $y = e^{-x} - e^{-2x}$ та кут між віссю Ox і дотичною до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = 0$.

15.133. Знайти точки екстремуму функції $y = e^{-x} \sin x$ і кут між віссю Ox та дотичною до графіка даної функції у точці з абсцисою $x = 0$.

15.134. Знайти точки екстремуму функції $y = x - \ln(1 + x)$ і точку графіка даної функції, в якій дотична до графіка паралельна прямій, що проходить через точки A (2; 3) та B (—1; 4).

15.135. Знайти екстремуми функції $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$ і скласти рівняння дотичної до графіка у точці з абсцисою $x = -2$.

15.136. Дано функцію $y = -4x^4 - 5x^2 + 9$. Знайти її екстремуми та ординати точок перетину з графіком функції $y = -9x^2 + 9$.

15.137. Показати, що функція $y = x^3 + 4x$ зростає на всій числовій прямій.

15.138. При якому значенні p функція $f(x) = \cos x - px + q$ спадає на всій числовій прямій?

15.139. Довести, що функція $y = 2x + \sin x$ зростає на всій числовій прямій.

15.140. Довести, що функція $y = x + \dfrac{1}{1 + x^2}$ зростає на всій числовій прямій.

Знайти проміжки зростання та спадання функцій (15.141—15.145):

15.141. $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. **15.142.** $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

15.143. $f(x) = -x(x - 3)^2$.

15.144. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$.

15.145. $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 4)^2$.

Знайти найменше і найбільше значення функцій на заданих проміжках (15.146—15.164):

15.146. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; $[-2;\ 2]$.
15.147. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$; $[-2;\ 1]$.
15.148. $y = x^5 - x^3 + x + 2$; $[-1;\ 1]$.

15.149. $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; $[-5;\ -1]$.

15.150. $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$; $[1;\ 6]$.

15.151*. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$; $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.152. $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}\sin x$; $[0;\ \pi]$.

15.153. $y(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$; а) $[-3;\ 3]$; б) $[2\sqrt{5};\ 8]$.

15.154. $f(x)=x+\cos^2 x$; $[0;\ \pi/2]$.
15.155. $f(x)=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,2x$; $[\pi/6;\ \pi/3]$.
15.156. $f(x)=0{,}5\cos 2x+\sin x$; $[0;\ \pi/2]$.

15.157. $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$, $[-\pi/2;\ \pi/2]$.

15.158. $f(x)=\cos^2 x+\sin x$; а) $[0;\ \pi/4]$; б) $[\pi/3;\ \pi]$.

15.159*. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$; а) $[3/4;\ 2]$; б) $[3/2;\ 3]$.

15.160. $f(x)=x+\frac{8}{x^4}$; а) $[-2;\ -1]$; б) $[1;\ 3]$.

15.161. $f(x)=(5-x)\,2^{-x}$; а) $[-1;\ 0]$; б) $[5;\ 6]$.

15.162. $f(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}}$; а) $[-8;\ -1]$; б) $[-1;\ 1]$.

15.163. $y=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x$; а) $[-7;\ 0]$; б) $[1;\ 2]$.
15.164. $f(x)=2x^2-\ln x$; $[1;\ e]$.

15.165. Знайти найбільше значення функції $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$ на проміжку $[0;\ \pi/2]$.

15.166. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x)=x+\frac{1}{x}$ та визначити, в якій з точок $x_1=\log_5 4$ чи $x_2=\log_5 3$ функція набуває найбільшого значення.

15.167. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x)=(1+x)/\sqrt{x}$ та визначити, в якій з точок $x_1=e^{-1}$ чи $x_2=e^{-2}$ функція набуває найбільшого значення.

15.168. Знайти найменше значення функції

$$f(x)=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$$

на інтервалі $(0;\ \pi)$.

15.169. Знайти найменше значення функції

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$$

на півінтервалі $[0;\ 1)$, n — число натуральне.

15.170*. Знайти проміжок зростання функції $y = \dfrac{x}{\ln x}$, а потім визначити, що більше: e^{π} чи π^{e}.

Знайти екстремуми та вказати проміжки зростання і спадання функцій (15.171—15.175):

15.171. $y = e^{-x} - e^{-2x}$. **15.172.** $y = x^2 e^{-x}$.

15.173. $y = e^{-x} \sin x$, якщо $0 < x < \pi$.

15.174. $y = x + \ln(1 - 2x)$. **15.175.** $y = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

15.176. Число 18 розбити на такі два доданки, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

15.177. Число 180 розбити на три додатних доданки так, щоб два з них відносились, як 1 : 2, а добуток трьох доданків був найбільшим.

15.178. Знайти число, яке б перевищувало свій квадрат на максимальне значення.

15.179. Треба загородити прямокутну ділянку землі площею 294 м^2 і потім розділити ділянку огорожею на дві рівні частини. При яких лінійних розмірах ділянки довжина всієї огорожі буде найменшою?

15.180. Прямокутний лист жерсті має лінійні розміри 5×8 дм. У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати і роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимально можлива місткість такої коробки?

15.181. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 24 см і кутом 60° вписано прямокутник, основа якого міститься на гіпотенузі. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

15.182. Дві сторони паралелограма лежать на сторонах даного трикутника, а одна з його вершин розміщена на третій стороні. За яких умов площа паралелограма буде найбільшою?

15.183. Серед рівнобедрених трикутників із заданою бічною стороною a знайти трикутник з найбільшою площею.

15.184. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакові довжини — по 50 см. Знайти довжину її більшої основи, при якій площа трапеції буде найбільшою.

15.185. Знайти сторони прямокутника з найбільшою площею, вписаного у прямокутний трикутник із сторонами 18, 24 і 30 см, який має з ним спільний прямий кут.

15.186. Визначити сторони прямокутника з найбільшою площею, вписаного у прямокутну трапецію з основами 24 і 8 см і висотою 12 см (дві вершини прямокутника лежать на бічних сторонах трапеції, а дві інші — на її більшій основі).

15.187. Із пункту A на прогулянку вийшов пішохід із швидкістю v км/год. Після того, як він віддалився від пункту A на 6 км, з цього ж пункту вслід за ним виїхав велосипедист, швидкість якого була на 9 км/год більша за швидкість пішохода. Коли велосипедист наздогнав пішохода, вони повернули назад і прибули разом у пункт A із швидкістю 4 км/год. При якому значенні v час прогулянки пішохода буде найменшим?

15.188. У рівнобедрений трикутник із сторонами 15, 15 і 18 см вписано паралелограм найбільшої площі так, що кут при основі у них спільний. Знайти сторони паралелограма.

15.189. В яке коло можна вписати прямокутник найбільшої площі з периметром 56 см?

15.190. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі, щоб площа трапеції була найбільшою?

15.191. Кут при вершині A трапеції $ABCD$ дорівнює α. Довжина бічної сторони AB удвічі більша за довжину меншої основи BC. При якому значенні α величина кута BAC буде найбільшою? Чому дорівнює це найбільше значення.

15.192. Знайти косинус кута при вершині рівнобедреного трикутника, який має найбільшу площу при заданій сталій довжині медіани, проведеної до її бічної сторони.

15.193. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α. При якому значенні α відношення радіусів вписаного і описаного кіл є найбільшим? Чому дорівнює найбільше значення цього відношення?

15.194. Яких розмірів мають бути радіус основи і висота відкритого циліндричного бака, щоб при заданому об'ємі V на його виготовлення було витрачено найменшу кількість листового металу?

15.195. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди має сталу задану площу і нахилена до площини основи під кутом α. При якому значенні α об'єм піраміди є найбільшим?

15.196. У правильну чотирикутну піраміду з ребром основи a і висотою H вписано правильну чотирикутну призму так, що її нижня основа розміщена в основі піраміди, а вершини верхньої основи — на бічних ребрах. Знайти ребро основи і висоту призми, яка має найбільшу бічну поверхню.

15.197. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має сталу задану довжину і утворює з площиною основи кут α. При якому значенні α об'єм піраміди буде найбільшим?

15.198. У правильній трикутній піраміді бічна грань має задану сталу площу і утворює з площиною основи кут α. При якому значенні α відстань від центра основи піраміди до її бічної грані найбільша?

15.199. У конус із заданим сталим об'ємом вписано піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом при вершині, що дорівнює α. При якому значенні α об'єм піраміди найбільший?

15.200. Твірна конуса має сталу довжину і утворює з висотою конуса кут α. У конус вписано правильну шестикутну призму з рівними ребрами (основа призми розміщена у площині основи конуса). При якому значенні α бічна поверхня призми найбільша?

15.201. Змінна y обернено пропорційна змінній x. Знайти коефіцієнт k оберненої пропорційності і заповнити таблицю:

x		0,1	9,6
y	30		3,05

На графіку заданої оберненої пропорційності знайти точку, найближчу до початку координат O (0; 0).

15.202. Відомо, що потужність P, яку віддає електричний елемент, визначається за формулою $P = E^2R/(r + R)^2$, де E — стала електрорушійна сила елемента, r — сталий внутрішній опір, R — зовнішній опір. Яким має бути зовнішній опір R, щоб потужність P була найбільшою?

Знайти проміжки зростання і спадання функцій, точки екстремуму та накреслити графіки функцій (15.203—15.212):

15.203. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$. **15.204.** $y = 0{,}5x^4 - 4x^2$.

15.205. $y = x^4 - 10x^2 + 9$.

15.206. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$.

15.207. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. 15.208. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$.

15.209. $y = 8 + 2x^2 - x^4$. 15.210. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}$.

15.211. $y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2$. 15.212. $y = \frac{2}{1 + x^2}$.

Знайти проміжки зростання і спадання функцій і точки екстремуму (15.213—15.230):

15.213. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. 15.214. $y = \frac{-5}{(x-2)^2 + 1}$.

15.215. $y = x^2 + \frac{1}{x}$. 15.216. $y = x + \frac{4}{x^2}$.

15.217. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. 15.218. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$.

15.219. $y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 8}$. 15.220. $y = \frac{1}{x^2 + 8x}$.

15.221. $y = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$. 15.222. $y = \frac{4}{x^2 - 2x + 2}$.

15.223. $y = \frac{1 - x}{(x-2)^3}$. 15.224. $y = \frac{3x}{x^2 + 4x + 4}$.

15.225. $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$. 15.226. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$.

15.227. $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$. 15.228. $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$.

15.229. $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$. 15.230. $y = \frac{1}{(x-1)(x-4)}$.

15.231*. Використовуючи метод математичної індукції, довести що при $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

15.232. Знайти функцію $F(x)$, графік якої проходить через задану точку $M_0(x; y)$, якщо:

а) $F'(x) = 4x^2 + 9x^{-2}$; $M_0(3; -2)$;

б) $F'(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{1}{3}$; $M_0(2; 1)$.

Для даної функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ (15.233—15.236):

15.233. $f(x) = x^4$; $M_0(-1; 2)$.

15.234. $f(x) = \sin 2x$; $M_0(0;\ 1)$.

15.235. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$; $M_0\left(\frac{\pi}{12};\ -1\right)$.

15.236. $f(x) = x^{-4}$; $M_0(2;\ -3)$.

15.237. Знайти функцію $F(x)$, якщо $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ і $F(1) = 3$.

15.238. Для функції $f(x) = \cos 4x$ знайти первісну $F(x)$, якщо $F(\pi/24) = -1$.

15.239. Знайти функцію $S(x)$, якщо її похідна $S'(x) = 2/\sqrt{5-x}$ і $S(1) = -1$.

Обчислити інтеграли (15.240—15.265):

15.240. $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x dx$.

15.241. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin^3 2x dx$.

15.242. $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

15.243. $\int\limits_0^{\pi/4} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt$.

15.244. $\int\limits_0^{3\pi/2} \frac{dx}{\cos^2(2x/9)}$.

15.245. $\int\limits_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$.

15.246. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin(x/2) dx$.

15.247. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$.

15.248. $\int\limits_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$.

15.249. $\int\limits_0^{2} (1 + 3x)^4 dx$.

15.250. $\int\limits_9^{-54} \sqrt[3]{2 - \frac{t}{9}}\, dt$.

15.251. $\int\limits_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$.

15.252. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1-x}\, dx$.

15.253. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{0,5x}$.

15.254. $\int\limits_1^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x}\right) dx$.

15.255. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$.

15.256. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1} dx$.

15.257. $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

15.258. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.

15.259. $\int\limits_0^{1} \frac{x dx}{\sqrt{9+16x}}$.

15.260. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^3}$.

15.261. $\int\limits_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$.

15.262. $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x\,dx$.

15.263. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 4x \sin 5x\,dx$.

15.264. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos 3x \cos 2x\,dx$.

15.265. $\int\limits_{-2}^{2} (10^{x/4} - \sin \pi x)\,dx$.

Обчислити площі фігур, обмежених заданими лініями (15.266—15.273):

15.266. $y = x^3$, $y = 1$ і $x = 2$.
15.267. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ і $x = \pi/4$.
15.268. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ і $x = 9$.
15.269. $y = x^3$ і $y = \sqrt{x}$.
15.270. $y = 2x - x^2$ і $y = 3/4$. **15.271.** $y = x^4$ і $y = x$.
15.272. $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 0{,}5$ і $x = 2{,}5$.
15.273. $y = 5/x$ і $y = 6 - x$.

15.274. Чому дорівнює шлях, який пройшла точка, що рухається прямолінійно, за відрізок часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$, якщо швидкість точки $v(t) = 2t^2 + 3t$ (t — в секундах, v — в м/с)? Чому дорівнює прискорення цієї точки в момент $t = 2$?

15.275. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t) = \sqrt[3]{1+t}$ (t — в секундах, v — в м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за перші 7 с. Чому дорівнює прискорення тіла в момент $t = 7$?

Глава 16

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ З ГЕОМЕТРІЇ

Приклад 1. Довести, що в прямокутному трикутнику величина кута між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи, дорівнює модулю різниці величин гострих кутів трикутника (рис. 16.1).

△ Нехай $\angle C = \pi/2$, CD — висота, CE — медіана. Треба довести, що $\angle DCE = |\angle B - \angle A|$. Покладемо $\angle DCE = \angle x$, тоді $\angle DCA = \angle B$ (оскільки обидва кути доповнюють кут A до $\pi/2$). У прямокутному трикутнику довжина медіани, проведеної до гіпотенузи, дорівнює половині довжини гіпотенузи; отже, трикутник ACE рівнобедрений і $\angle ECA = \angle x + \angle B = \angle A$. Звідси $\angle x = \angle A - \angle B$. Якщо вершини A і B трикутника поміняти місцями (див. рис. 16.1), то дістанемо $\angle x = \angle B - \angle A$. Обидва результати можна об'єднати в один: $\angle x = |\angle B - \angle A|$. ▲

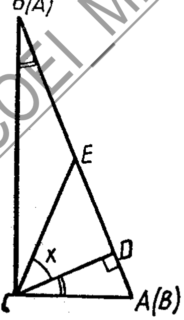

Рис. 16.1

Приклад 2. Довести, що для будь-якої точки M, що належить довільному трикутнику ABC із сторонами a, b і c і висотами h_a, h_b і h_c (рис. 16.2), виконується рівність $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$, де x, y і z — відповідно відстані від точки M до сторін BC, AC і AB. Сформулювати відповідну власти-

17.121. Точки M і N — середини відрізків AB і CD. Довести, що $MN \leqslant \frac{1}{2}(AC + BD)$, $MN \leqslant \frac{1}{2}(BC + DA)$.

17.122. Дано трикутник ABC; M — точка перетину його медіан. Довести, що $OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$, де O — довільна точка простору.

17.123. Дано трикутник ABC. Пряма l перетинає прямі BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Довести, що вектори $\overline{AB} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} + \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} + \overline{C_1A_1}$ колінеарні.

17.124. У коло вписано трикутник ABC. Пряма, що містить медіану CC_1 трикутника, перетинає коло повторно в точці D. Довести, що $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

17.125. У рівнобедреному трикутнику ABC, що має площу S, проведено висоти AM і BN. Знайти скалярний добуток $\overline{AM} \cdot \overline{BN}$ за умови, що точки M і N лежать на бічних сторонах трикутника, а довжина його основи дорівнює c.

17.126. Нехай вектор a має координати $\frac{2m}{1+m^2}$ і $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, а вектор $\overline{b}$ — координати $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ і $\frac{2k}{1+k^2}$. Довести, що обидва вектори одиничні: $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$. Використовуючи властивість скалярного добутку $|\overline{a} \cdot \overline{b}| < |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$, довести справедливість нерівності

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(m+k)(1-mk)}{(1+m^2)(1+k^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

17.127. У прямокутному трикутнику ABC відомо довжини катетів: $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Точка M ділить гіпотенузу у відношенні $AM : MB = 3 : 4$. На які частини вектор $\overline{CM}$ ділить кут C?

17.128. Довести, що промінь CM, де C — вершина прямого кута трикутника ABC, а M — центр квадрата, побудованого на гіпотенузі і розміщеного поза ним, є бісектрисою кута C.

17.129. Дано п'ятикутник $ABCDE$: точки M, N, P і Q — відповідно середини його сторін AB, BC, CD і DE. Довести, що коли U і V — відповідно середини MP і NQ, то вектор $\overline{UV}$ колінеарний вектору $\overline{AE}$. Знайти відношення $AE : UV$.

17.130. У коло з центром O вписано чотирикутник $ABCD$. Його діагоналі, що перетинаються в точці P, взаємно перпендикулярні. Довести, що середини сторін AB і CD, центр O і точка P є вершинами паралелограма.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Необхідні обчислення треба виконувати, не користуючись технічними засобами: калькулятором, логарифмічною лінійкою, таблицями тощо.

Варіант I

1. У рівнянні $x^2 + bx - 12 = 0$ один із коренів дорівнює 3. Знайти значення коефіцієнта b.

2. Спростити вираз $(2x^{1/2} - y^{-1/4})(2x^{1/2} + y^{-1/4})$ і обчислити його значення при $x = 1{,}2$ і $y = 4$.

3. Знайти суму коренів рівняння $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{2{,}1x+1} = x - 1$.

5. Знайти суму цілих значень x, які задовольняють нерівність $x^2 - 3x < 4$.

6. Використовуючи формули тотожних перетворень, обчислити $\cos 50° \cos 40° - 2 \sin 50° \sin 20° \cos 20°$.

7. Знайти найменший корінь рівняння $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$, який міститься в інтервалі $(0°; 90°)$. Відповідь записати в градусах.

8. Площа рівнобічної трапеції 180 см². Довжина середньої лінії дорівнює 45 см; довжина бічної сторони 5 см. Знайти довжину меншої основи трапеції.

9. Висота конуса дорівнює 3; кут між висотою і твірною дорівнює 45°. У цей конус вписано інший конус так, що його вершина збігається з центром основи першого конуса, а відповідні твірні конусів перпендикулярні. Знайти об'єм вписаного конуса (покласти $\pi = 3{,}14$ і заокруглити відповідь до сотих).

10. Обчислити $f'(\pi/2)$, якщо $f(x) = 0{,}5 \sin x \operatorname{tg} 2x + 2{,}5 \cos x$.

Варіант II

1. Обчислити $\dfrac{4\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.

2. Розв'язати рівняння $2x + \sqrt{3x-2} = 3$.

3. Знайти число цілих розв'язків нерівності $5 + \dfrac{17}{x-2} < \dfrac{2}{x+3}$.

4. Розв'язати рівняння $\log_5 x - \log_5 (x-4) = 1$.

5. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 24 і 10, а радіус описаного навколо неї кола дорівнює 13. Знайти висоту трапеції за умови, що центр описаного кола розміщується поза трапецією.

6. Знайти суму квадратів найбільшого і найменшого значень функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на відрізку $[-1; 2]$.

7. Знайти число розв'язків рівняння $\sin 3x - \cos 3x = 0$ на відрізку $[0; \pi]$.

8. Сума четвертого і п'ятого членів геометричної прогресії дорівнює 20, а сума третього і четвертого членів дорівнює 5. Знайти шостий член цієї прогресії.

9. Металеву кулю радіуса $R = \sqrt[3]{2}$ переплавлено і з неї відлито конус, площа бічної поверхні якого у три рази більша за площу основи. Знайти висоту конуса.

10. Розв'язати рівняння $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$.

Варіант III

1. Спростити вираз

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} + 2\sqrt{x}$$

і знайти його значення при $x = 7$.

2. Знайти $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$.

3. Розв'язати рівняння $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 1$.

4. Знайти $f'(\pi/4)$, якщо $f(x) = 2\sqrt{2} \sin^3 x$.

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 24. Знайти бічну сторону.

6. Знайти суму коренів рівняння $f(x)+4f'(x)=0$, якщо $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$.

7. Знайти добуток коренів рівняння $\cos^2\frac{\pi x}{2}=1$, які належать відрізку $[\pi;\ 3\pi]$.

8. Знайти ціле число, яке задовольняє систему нерівностей

$$\begin{cases}\log_{1/2}(2x-3)>-3,\\ x^2-4x>0.\end{cases}$$

9. З точки, віддаленої від площини на відстань $5\sqrt{2}$, проведено дві похилі, що утворюють з площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайти відстань між основами похилих.

10. Вектор $\bar{a}\,(x;\ -1;\ 2)$ перпендикулярний до вектора $\bar{b}\,(1;\ 2;\ 0)$. Знайти модуль вектора $\bar{a}$.

Варіант IV

1. Обчислити $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{1/2}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}$.

2. Знайти всі цілі значення x, що задовольняють нерівність $\frac{4-x}{x-5}\geqslant 1-\frac{4}{x}$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

4. Знайти корені рівняння $2^{1+\log_2 x}+4^{1+\log_2 x}=110$.

5. Рівнобічна трапеція з основами 2 і 3 см і кутом 60° обертається навколо меншої основи. Знайти об'єм тіла обертання і записати відповідь, заокругливши його до найближчого числа.

6. Скільки коренів рівняння $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1$ міститься у проміжку $[-\pi/8;\ \pi/2]$?

7. Знайти координату середини відрізка, на якому справедлива нерівність $\log_{0,1}(x^2-x+8)\geqslant -1$.

8. Знайти два числа, якщо їхнє середнє арифметичне на 16 менше за більше з цих чисел, а середнє геометричне на 8 більше за менше з них.

9. Спростити вираз $\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}\right)^6$.

10. Знайти найменше і найбільше значення функції $y=\sqrt{x(10-x)}$ в області її визначення.

Варіант V

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$.

2. Спростити

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2};\quad a>b>0.$$

3. Знайти більший корінь рівняння

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}.$$

4. Знайти найменше додатне ціле x, що задовольняє нерівність $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}} > 0{,}64$.

5. Обчислити $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$.

6. Знайти корінь рівняння $\sin x - 1 = 0{,}5\sin 2x - \cos x$, який міститься в інтервалі $0^\circ < x < 180^\circ$. Відповідь записати в градусах.

7. У рівнобедреному трикутнику висота відноситься до основи, як 3 : 4, а бічна сторона дорівнює $2\sqrt{39}$ см. Знайти площу трикутника.

8. Металевий циліндр з діаметром основи $d = 4$ см і висотою $h = 4$ см переплавили в кулю. Обчислити радіус цієї кулі (вважати $\sqrt[3]{12} \approx 2{,}3$).

9. Число 26 розбити на такі два доданки, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

10. Розв'язати рівняння $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Варіант VI

1. Обчислити $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$.

2. Обчислити $3x + y + z$, якщо $x + y + 2z = 14$, $2x + y + z = 10$, $x + 2y + z = 12$.

3. Розв'язати рівняння $\log_2(17 - 2^x) = 4 - x$.

4. Обчислити значення 10^x при $x = \lg 12 + (\log_4 10)^{-1}$.

5. Дано: $\operatorname{ctg} 2\alpha = 3/4$, $0 < \alpha < \pi/2$. Знайти $\cos^2\alpha$.

6. Скільки коренів рівняння $\sin x + \cos x = 1{,}4$ міститься на відрізку $[-\pi;\ 3\pi]$?

7. Знайти координату середини відрізка, на якому справедлива нерівність $3\sqrt[6]{x+1} - \sqrt[3]{x+1} \geqslant 2$.

8. Восьмий член арифметичної прогресії дорівнює 2, одинадцятий член дорівнює 11. Скільки членів прогресії, починаючи з першого, треба взяти, щоб їхня сума дорівнювала 30?

9. Знайти квадрат найбільшого значення функції $f(x) = \sin x + \cos x$.

10. Через вершину конуса проведено площину, що утворює з площиною основи кут, косинус якого дорівнює 1/3, і відтинає на колі основи дугу 90°. Відстань від центра основи до цієї площини дорівнює $2/\sqrt[3]{\pi}$. Знайти об'єм конуса.

Варіант VII

1. Обчислити $(4^{-0,25} - 2^{0,5})(4^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{1/3})$.

2. Обчислити значення виразу $x - y + 2z$, якщо $x + y = 4$, $y + z = 8$, $x + z = 6$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2x}\lg 2 = \lg(2^{1/x} - 2)$.

4. Скільки коренів рівняння $\sin x + \cos 2x = 0$ міститься на відрізку $[-\pi;\ 3\pi]$?

5. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$; $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Обчислити значення виразу $25\sin^2\alpha\cos\alpha$.

6. Знайти довжину відрізка, на якому виконується нерівність $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} \leqslant 6$.

7. Скільки разів перетинає вісь абсцис графік функції $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$?

8. Сума сьомого і одинадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 10, а сума п'ятого і десятого членів дорівнює 1. Знайти суму 20 перших членів.

9. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - \sqrt{x}$.

10. Бічна сторона рівнобічної трапеції в три рази довша за меншу основу. Бісектриси тупих кутів цієї трапеції перетинаються в точці, розміщеній на основі. Знайти відношення площі трапеції до площі трикутника, утвореного меншою основою і бісектрисами.

Варіант VIII

1. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{3x}{2x-2} = -\dfrac{5}{2}$.

2. Знайти x в градусах, якщо $180° < x < 360°$ і $\cos^2(180° + x) + 3\cos^2(90° + x) = 2$.

3. Знайти найбільше значення x, при якому виконується нерівність $x^2 + 4(\sqrt{4-x})^2 - 21 \leqslant 0$.

4. Розв'язати рівняння $2\sqrt[4]{3x+0,1} = 3\sqrt{3x+0,1} - 1$.

5. Різниця довжин основ трапеції дорівнює 14 см; довжини бічних сторін дорівнюють 13 і 15 см. Обчислити площу трапеції за умови, що в цю трапецію можна вписати коло.

6. Моторний човен пройшов 60 км проти течії річки і 60 км за течією, витративши на шлях проти течії на 50 хв більше, ніж на шлях за течією. Знайти швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

7. Знайти ціле число x, якщо

$$\frac{\sqrt[3]{9^2}\cdot(1/3)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1}\cdot 27^{-2/3}} = \frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

8. Обчислити значення виразу $27\cos^4 2\alpha$, якщо $\cos(3\pi - 4\alpha) = 2/3$

9. Знайти суму і добуток коренів рівняння

$$x^2 6^{-x} + 6^{\sqrt{x}+2} = x^2 6^{\sqrt{x}} + 6^{2-x}.$$

10. Обчислити значення A, якщо $A = 4^B$, де $B = \log_2 5 + \log_{1/4} 10$.

Варіант IX

1. Знайти ціле число x, якщо

$$\frac{(x-1)(\sqrt[4]{9})^3}{\sqrt{27}\cdot(1/3)^3} = \frac{9^2}{(\sqrt[6]{9})^3}.$$

2. Розв'язати рівняння $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$.

3. Розв'язати рівняння $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.

4. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 32 см². Знайти бічну сторону, якщо кут при основі трапеції дорівнює $\pi/6$.

5. Знайти синус більшого гострого кута прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, в 2,5 рази більший за радіус вписаного кола.

6. Спростити вираз

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2(\pi - \alpha).$$

7. Обчислити $(0{,}001^{\lg 3 - 1} + 0{,}01^{\lg 0{,}3 + 0{,}5}) \cdot 2{,}7$.

8. На ребрі двогранного кута, що дорівнює 120°, взято відрізок $AB = 3$ см; із його кінців у різних гранях до нього проведено перпендикуляри $AC = 1$ см і $BD = 2$ см. Обчислити відстань між точками C і D.

9. Дано: $F(x) = \frac{x}{2 - x} + 2$. Знайти суму коренів рівняння $F(x) = F'(x)$.

10. Знайти площу трикутника, утвореного відрізками осей Ox і Oy та прямою, що проходить через точки (0; 4) і (4; 2).

Варіант X

1. Знайти ціле число $2x$, якщо

$$\frac{x + 5{,}5}{14}(4 + \sqrt{2}) = \frac{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{8^{2/3} - 2^{1/2}}.$$

2. Знайти значення виразу $x^2 + y^2$, якщо $2x + y = 2$, $x + 3y = 3$.

3. Розв'язати рівняння $\log_{1/2}(x - 1) + \log_{1/2}(x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(7 - x) = 1$.

4. Скільки цілих значень x задовольняють нерівність $x^2 + 8x < 20$?

5. Розв'язати рівняння $2^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 6{,}5$.

6. Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 15° + 4 \operatorname{tg} 60°$.

7. Скільки коренів рівняння $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$ міститься на проміжку $[0; \pi]$?

8. Шостий член арифметичної прогресії в 4 рази менший за дев'ятий член, а їх сума дорівнює 20. Знайти суму дев'яти перших членів прогресії.

9. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = x \ln x$.

10. Через вершини довільного чотирикутника проведено прямі, паралельні його діагоналям. Знайти відношення площі паралелограма, утвореного цими прямими, до площі даного чотирикутника.

Варіант XI

1. Знайти ціле число $3x$, якщо

$$\left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9^{1/2}\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2^{3/2}(3 - \sqrt{5})} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}.$$

2. Знайти значення виразу $x^2 - y$, якщо $2x - 5y = 0$, $x + 10y = 2$.

3. Обчислити значення 5^x при $x = \log_4 16 + 1,5 \log_{1/3} 3 - \lg\sqrt{5} - \lg\sqrt{2}$.

4. Обчислити довжину відрізка, на якому виконується нерівність $x^2 - x \leqslant 6$.

5. Розв'язати рівняння $4 \cdot 5^x - 5^{-x} + \lg 100 = 5$.

6. Спростивши вираз, обчислити $\cos 20° - \sin 20° \operatorname{ctg} 10°$.

7. Скільки коренів має рівняння $\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0$ на проміжку $[0; \pi]$?

8. Дослідити функцію $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Скільки разів її графік перетинає вісь Ox?

9. Сума шостого і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 20, а їхній добуток дорівнює 64. Знайти десятий член цієї прогресії, якщо перший її член від'ємний.

10. Осьовий переріз конуса — рівносторонній трикутник. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму вписаної в нього кулі.

Варіант XII

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2$.

2. У трикутнику з основою 15 см проведено відрізок, паралельний основі. Площа здобутої трапеції становить 75 % від площі трикутника. Знайти довжину цього відрізка.

3. Спростити вираз $\dfrac{\sin(60° + \alpha)}{4\sin\left(15° + \dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75° - \dfrac{\alpha}{4}\right)}$, а потім знайти його значення, якщо $\sin\left(30° + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0,8$, $0° < \alpha < 90°$.

4. Розв'язати рівняння $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg x = 9$.

5. Знайти найменший з від'ємних розв'язків нерівності $\sqrt{\dfrac{3 + 2x}{4 - x}} > -\sqrt{3}$.

6. Скільки коренів, які не перевищують за абсолютною величиною π, має рівняння $1 + \operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^4 x - \sin^4 x$?

7. Розв'язати рівняння $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} - \left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3} = 0$.

8. Відношення середнього арифметичного двох додатних чисел до середнього геометричного цих самих чисел дорівнює 13/12. Знайти відношення більшого із заданих чисел до меншого.

9. Дано: $\cos 3\alpha = 2/3$. Обчислити значення виразу $81\cos^2\left(6\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

10. Довести, що функція $f(x) = \sin^2 2x + 0,5\cos 4x + 2\sin^2 x + \cos 2x$ набуває одного й того самого значення при будь-якому значенні x. Знайти це значення.

Варіант XIII

1. Спростити вираз

$$\frac{x^{-6}-64}{16+4x^{-2}+x^{-4}}\cdot\frac{1}{4-4x^{-1}+x^{-2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$$

2. Спростити вираз $\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right).$

3. Розв'язати рівняння $1{,}5\cdot 4^{x+0,5}=6^x+2\cdot 9^{x-0,5}.$

4. Сума першого, третього і п'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює —12, а їхній добуток дорівнює 90. Знайти перший член a_1 і різницю d прогресії, вибравши найменше значення a_1.

5. Знайти суму всіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/2}\frac{x-1}{7-x}>-1.$

6. Знайти число розв'язків рівняння $f'(x)=0$ на відрізку $[0; 2\pi]$, де $f(x)=4\sin 2x-3\cos 2x-10x$.

7. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює $4\sqrt{10}$, а медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює $3\sqrt{10}$. Знайти основу трикутника.

8. При якому значенні параметра a рівняння $|x^2-2x-3|=a$ має рівно три розв'язки?

9. У трикутній піраміді $ABCD$ грані ABC і BCD — правильні трикутники із заданою висотою. Кут між цими гранями дорівнює φ. При якому значенні $1/\cos\varphi$ площа повної поверхні піраміди є найбільшою?

10. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до параболи $y=x^2-3x+4$ із початку координат, за умови, що абсциса точки дотику — число додатне.

Варіант XIV

1. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0.$

2. Обчислити $A=5^B$, де $B=2\log_{25}8+\log_{1/5}5.$

3. Знайти найменше x, при якому виконується нерівність

$$\frac{x-3}{2}\geqslant\frac{(\sqrt{x-5})^2}{x-6}.$$

4. До басейну підведено три труби. Перша з них наповнює його на 4 год довше, ніж друга, а друга — за 1/3 часу, необхідного для наповнення басейну третьою трубою. Якщо всі труби будуть подавати воду одночасно, то басейн наповниться за 4 год. За скільки годин перша і третя труби, подаючи воду окремо, зможуть заповнити басейн?

5. Розв'язати рівняння

$$(x^2-3x)\cdot 9^{\sqrt{2-x}}+4\cdot 9^x=(x^2-3x)\cdot 9^x+4\cdot 9^{\sqrt{2-x}}.$$

6. Знайти ціле число x, якщо $\frac{(\sqrt[6]{4})^5\cdot 16^{1/2}}{\sqrt[3]{64}\cdot x}=(16^{1/6})\cdot 4^{-1/2}.$

7. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює середній лінії, а периметр дорівнює 48. Знайти бічну сторону.

8. Обчислити значення виразу $4\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Розв'язати рівняння $x\sqrt[3]{x}+16=8\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

10. Знайти x в градусах, якщо $0°<x<360°$ і $2\sin^2(x+270°)-7\sin(x+90°)=4$.

Варіант XV

1. Розв'язати рівняння

$$x^2\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+4^{2-x}=16\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 2^{-2x}.$$

2. Знайти ціле число x, якщо

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{-1/2}}{(\sqrt[6]{25})^2\cdot\sqrt{5}\cdot x}=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^2.$$

3. Знайти значення A, якщо $A=2^B+6^C$, де $B=2/\log_{\sqrt{3}}2$ і $C=1/\log_2 6$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{42-x}=2+\sqrt{6-x}$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{6}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}-1$.

6. Обчислити значення виразу $16\sin^4\left(\frac{11\pi}{2}-2\alpha\right)$, якщо $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)=\frac{1}{4}$.

7. Два кола однакового радіуса зовні дотикаються одне до одного в точці C. Крім того, кожне з них дотикається зовні до третього кола, радіуса 6,5 в точках A і B відповідно. Знайти площу трикутника ABC, якщо $AB=5$.

8. Знайти найбільше значення x, при якому виконується нерівність

$$\frac{x^2+x-45}{x-6}\geqslant\frac{3x+1}{2}.$$

9. Знайти x в градусах, якщо $90°<x<270°$ і $3\cos^2(x+270°)+\sin^2(x+180°)=1$.

10. За першу поїздку на автомобілі було витрачено 10 % бензину з бака, за другу поїздку — 25 % того бензину, що залишився. Після двох поїздок залишилося бензину на 13 л менше, ніж було спочатку. Скільки літрів бензину було у баку до поїздок?

Варіант XVI

1. Обчислити значення $A=2^B-10^C$, де $B=1/\log_6 2$, $C=2/\log_2 10$.

2. Знайти раціональне значення x, яке задовольняє рівняння $10x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{5/3}\cdot 4^{-2/3}:\sqrt[6]{64}$.

3. Розв'язати рівняння $2\sqrt{x-2}-15=\sqrt[4]{x-2}$.

4. Знайти найбільше значення x, при якому виконується нерівність $2x-5\sqrt{x}+2\leqslant 0$.

5. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її висота дорівнює 16, а діагональ дорівнює 20.

6. Знайти x в градусах, якщо $0° < x < 270°$ і $\sin(90° + 2x) + \sin x = 0$.

7. Обчислити значення виразу $49 : \mathrm{tg}^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

8. На двох верстатах необхідно обробити по 150 деталей, причому на першому верстаті обробляли за годину на 5 деталей більше, ніж на другому. На першому верстаті роботу було розпочато на 1 год пізніше, ніж на другому і, крім того, в його роботі була перерва на 30 хв. Однак на обох верстатах роботу закінчили одночасно. Скільки деталей за годину обробляли на кожному верстаті?

9. Розв'язати рівняння

$$x^2 \cdot 5^{\sqrt{3x-2}} + 5^{2+x} = 5^{\sqrt{3x-2}+2} + x^2 \cdot 5^x.$$

10. Розв'язати рівняння $\frac{6-x}{1-x^2} - \frac{x+3}{x(1-x)} = \frac{x+5}{x(1+x)}$.

Варіант XVII

1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}} = 6$.

2. У квадраті $ABCD$ точка E — середина сторони BC, точка F — середина сторони CD. Знайти тангенс кута EAF.

3. Знайти суму всіх значень параметра a, при кожному з яких рівняння $(a-2)x^2 - 2\sqrt{6}x + a - 1 = 0$ має рівно один корінь.

4. Висота і діагональ рівнобічної трапеції дорівнюють відповідно 5 і 13. Знайти площу трапеції.

5. Знайти $\sin\alpha$, якщо $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 3$.

6. Знайти суму всіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/3}(2x-1) > -2$.

7. Знайти довжину відрізка, який відтинає на осі ординат дотична, проведена до кривої $y = 8/x^2$ у точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

8. Точка $M(2; 5)$ належить параболі $y = -x^2 + ax + 5$. Знайти ординату вершини параболи.

9. Бічні грані правильної трикутної призми — квадрати. Площа бічної поверхні призми дорівнює 144. Знайти об'єм многогранника, вершинами якого є центри всіх граней призми.

10. Знайти значення числа k, при якому рівність $2\sin 4x(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \sin kx$ виконується при будь-якому значенні x.

Варіант XVIII

1. Знайти суму квадратів коренів рівняння $x(x - \sqrt{3}) = 1$.

2. Розв'язати рівняння $\log_{1/2}(\log_2 x - 1) = -1$.

3. Три цілих додатних числа утворюють геометричну прогресію. Знайти третій член прогресії, якщо її другий член на 1 більший за перший член.

4. Знайти найменше значення функції $f(x) = |\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x|$.

5. У паралелограмі $ABCD$ ($AB \parallel CD$) бісектриса тупого кута B перетинає сторону AD у точці F. Знайти периметр паралелограма, якщо довжина AB дорівнює 12 і $AF : FD = 4 : 3$.

6. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} \geqslant 1, \\ 2 \cdot 4^{2x} \geqslant 32^x. \end{cases}$$

7. Висота конуса дорівнює 6. Твірна конуса утворює з площиною основи кут 60°. У конусі розміщено піраміду, основою якої є рівнобедрений прямокутний трикутник, вписаний в основу конуса, а вершиною — середина однієї із твірних конуса. Знайти об'єм піраміди.

8. Параметр k квадратного рівняння $x^2 - 2kx + 3(2k-3) = 0$ набуває таких значень: 1, 2, 3, 4, 5, 6 і 7. Кожному із вказаних значень k відповідає певне число коренів заданого рівняння. Знайти число всіх коренів.

9. Розв'язати рівняння $4 \operatorname{arctg} \dfrac{3x-1}{x+3} = \pi$.

10. Знайти цілий корінь рівняння $\dfrac{f(x)}{2f'(x)} = \dfrac{1}{3}$, якщо $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

Варіант XIX

1. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 16}$ на відрізку $[1; 6]$.

2. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)} \geqslant 0$.

3. Знайти $|x|$, якщо $|x-4| + 5x = -8$.

4. У паралелограмі $ABCD$ довжина діагоналі BD, перпендикулярної до сторони AB, дорівнює 6; довжина діагоналі AC дорівнює $2\sqrt{22}$. Знайти довжину сторони AD.

5. Розв'язати рівняння $\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-1} = 2$.

6. Знайти число коренів рівняння $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}(x/3)} = 0$ на відрізку $[0; 9\pi]$.

7. Куб з ребром, довжина якого дорівнює $4\sqrt[4]{3}$, перетинається площиною, яка проходить через середини трьох його ребер, що виходять із однієї вершини. Знайти площу перерізу.

8. Знайти $\sqrt{5} \cos(\operatorname{arctg} 0,75)$.

9. Знайти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

10. Обчислити $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots+\frac{(-1)^n}{3^n}+\dots}$.

Варіант XX

1. Знайти значення числа a, при якому система

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{x+3y}{5}=2, \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{x-5y}{3}=3, \\ \dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x-10y}{2}=a \end{cases}$$

має розв'язок.

2. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 4 - x$, $y = 4 + x$, $y = |x|$.

3. Знайти $\left(\dfrac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

4. Розв'язати рівняння $\log_2^2(2x) = \log_2 x^4$.

5. У прямокутному трикутнику відношення катетів дорівнює 0,5. Знайти тангенс гострого кута між медіанами, проведеними до катетів.

6. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5. Знайти другий член прогресії.

7. У результаті вимірювання деякої величини здобуто п'ять значень: 51; 51,2; 51,4; 52,1; 52,3. Знайти таке число x, для якого сума квадратів різниць між здобутими значеннями і числом x була б найменшою.

8. Розв'язати рівняння $\dfrac{\log_2\left(9 - x^{\log_x 2^{x-3}}\right)}{x} = 1$.

9. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 4. Знайти суму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

10. Знайти найменший додатний кут (в градусах), що задовольняє рівняння $2\cos^2(270^\circ + \alpha) + 7\sin(270^\circ - \alpha) = 5$.

Варіант XXI

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$.

2. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12. Радіус вписаного в трикутник кола дорівнює 3. Знайти площу трикутника.

3. Знайти суму всіх цілих додатних розв'язків нерівності $4^{x-1} - 2^x < 1{,}25$.

4. Знайти $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 3$.

5. Розв'язати рівняння $\log_2 \log_{1/2} \log_9 x = 0$.

6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \cos \pi x = -1, \\ x^3 - 5x^2 - 14x = 0. \end{cases}$

7. Знайти максимум функції $f(x) = 20x/(x^2 + 1)$.

8. Основою піраміди $ABCF$ є правильний трикутник ABC із стороною, довжина якої дорівнює 20. Ребро FB перпендикулярне до пло-

щини основи і дорівнює 5. Піраміду перерізає площина, паралельна перехресним ребрам AC і FB так, що в результаті перерізу здобуто квадрат. Знайти довжину сторони квадрата.

9. Знайти відстань між точками перетину параболи $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 3$ і прямої $4x + 3y + 9 = 0$.

10. Розв'язати рівняння $|x - 4| = x$.

Варіант XXII

1. Вираз $(2 \log_2 25 + \lg 2) \log_2 10$ перетворити до вигляду $(A \log_2 5 + B)^2$.

2. Відомо, що точка перетину прямих $2x + y = 9$ і $kx + 5y = 18$ належить бісектрисі першого координатного кута. Знайти число k.

3. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника менше $60°$. До бічної сторони проведено медіану і висоту, які відповідно дорівнюють $3\sqrt{5}$ і 6. Знайти бічну сторону.

4. Дотична, проведена до параболи $y = x^2 - 5x + 10$, утворює з віссю абсцис кут 45°. Знайти відстань від точки дотику до початку координат.

5. Розв'язати рівняння $\frac{25}{2x+1} + \frac{10}{\sqrt{2x+1}} = 3$.

6. Знайти $\cos^2 2\alpha$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = 1/\sqrt{5}$.

7. П'ятий член арифметичної прогресії дорівнює 4. Якою має бути різниця прогресії, щоб сума квадратів другого і шостого членів була найменшою.

8. У піраміді $ABCF$ через медіану BK основи ABC і середину L бічного ребра AF проведено площину. Знайти відношення об'єму многогранника $BCKLF$ до об'єму піраміди $ABKL$.

9. Знайти суму всіх цілих розв'язків нерівності $2^x + \frac{9}{2^x} < 10$.

10. Розв'язати рівняння

$$\frac{\pi}{24}(6x + 1) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Варіант XXIII

1. Сума модулів коренів квадратного рівняння $4x^2 + kx - 3 = 0$ дорівнює 2, причому модуль від'ємного кореня більший за додатний корінь. Знайти число k.

2. Знайти найменший додатний корінь рівняння $\log_3 \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{15} + \frac{1}{2} = 0$.

3. Різниця між площею круга і площею вписаного в нього квадрата дорівнює $2\sqrt{3}(\pi - 2)$. Знайти площу правильного шестикутника, вписаного в це коло.

4. Розв'язати рівняння $2x + \sqrt{x + 11} = 14$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{2}{9}x = (\sin 15° + \operatorname{tg} 30° \cos 15°)^2$.

6. Всі чотири грані піраміди — правильні трикутники. Знайти відстань між центрами двох її граней, якщо площа повної поверхні піраміди дорівнює $81\sqrt{3}$.

7. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x^2-x-12}\cdot(2^{x-1,5}-\sqrt{2})}{x+3}=0.$$

8. Знайти довжину відрізка, який відтинає на осі абсцис дотична, проведена до графіка функції $y=\sqrt{x^2+2x+4}$ у точці з абсцисою, що дорівнює -2.

9. Знайти цілий розв'язок нерівності $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-12x+35}<0$.

10. Знайти число коренів рівняння $\sin x+\cos 2x=0$, які належать відрізку $[0;\ 3\pi]$.

Варіант XXIV

1. Знайти суму всіх коренів рівняння $(x^2-7x+2)^2-13(x^2-7x)-26=0$.

2. Знайти $\sin^2 3\alpha$, якщо $\alpha=2\operatorname{arctg}1-\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$.

3. У прямокутному трикутнику ABC катети AC і BC відповідно дорівнюють 12 і 8; точка K — середина медіани BD. Знайти довжину відрізка CK.

4. Розв'язати рівняння $\log_{|x|}(x^4+x^3-6x^2-7x)=4$.

5. Знайти найменше значення функції $f(x)=2^x+2^{2-x}$ на відрізку $[0;\ 2]$.

6. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$) є квадрат $ABCD$, площа якого дорівнює 50. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точки F і K — відповідно середини ребер CC_1 і A_1B_1. Вектор $\overline{OF}$ перпендикулярний до вектора $\overline{DK}$. Знайти об'єм паралелепіпеда.

7. Якщо деяке двозначне число поділити на добуток його цифр, то в частці дістанемо 3, а в остачі 9. Якщо до суми квадратів цифр цього числа додати добуток його цифр, то дістанемо шукане число. Знайти це число.

8. Знайти $\sin^2 x$, якщо $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{tg}x=2$ і $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

9. Точка перетину прямих $2x-y=10$ і $3x+2y=1$ належить колу з центром у початку координат. Знайти радіус цього кола.

10. Знайти добуток всіх цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2-5x-6<0,\\ x^2-3x>0.\end{cases}$$

Варіант XXV

1. Знайти лише додатні корені рівняння $x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=$
$=8.$

2. Розв'язати рівняння $\log_{0,5}(x-12)=-\log_2\sqrt{x}$.

3. У трикутнику ABC кут C дорівнює $60°$, довжина сторони AB дорівнює $\sqrt{31}$. На стороні AC відкладено відрізок AD, довжина якого

дорівнює 3. Знайти довжину сторони BC, якщо довжина відрізка BD дорівнює $2\sqrt{7}$.

4. Бісектриса AD рівнобедреного трикутника ABC утворює з основою AC кут, тангенс якого дорівнює 0,5. Знайти косинус кута ABC.

5. На координатній площині xOy дано пряму $x + 5y = 4$ і два вектори $\bar{a}$ (2; —3) і $\bar{b}$ (—1; 5). На даній прямій знайти таку точку M, щоб вектор $\overline{OM}$ був перпендикулярним до вектора $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

6. Основою чотирикутної піраміди є квадрат. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи. Яку довжину повинна мати висота піраміди, щоб радіус сфери, описаної навколо піраміди, був найменшим за умови, що об'єм піраміди дорівнює 72?

7. Знайти найбільше значення функції $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ на відрізку $[\pi/4;\ 3\pi/4]$.

8. Знайти $f'(2)$, якщо $f(x) = x\ln(x^2 + 2x - 7)$.

9. Знайти суму всіх раціональних (у тому числі і скоротних) дробів із знаменником 2, які є розв'язками нерівності $2^x + 3 \cdot 2^{2-x} \leqslant 13$.

10. Знайти площу фігури, обмеженої графіком рівняння $x + |y| = 2$ і віссю ординат.

Варіант XXVI

1. Розв'язати рівняння $x = 2 - \sqrt{-10x - x^2}$.

2. Пасажир проїхав поїздом 120 км і, пробувши на станції 40 хв, повернувся назад поїздом, який проїжджає за годину на 6 км більше, ніж перший. Загальна тривалість поїздки становить 8 год. Скільки кілометрів за хвилину проїжджає кожен поїзд.

3. Знайти середину проміжку, на якому виконується нерівність $4x^2 + 4x + 2(\sqrt{2x+1})^2 \leqslant 34$.

4. Два кола однакового радіуса дотикаються зовні в точці C. Крім того, кожне з них дотикається зовні до третього кола радіуса 5 у точках A і B відповідно. Визначити площу трикутника ABC, якщо $AB = 6$.

5. Знайти x, якщо $\dfrac{4^{-1/3} \cdot 16^{2/3}}{\sqrt[3]{64x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3/4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}$.

6. Знайти суму і добуток коренів рівняння

$$2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^{x+1} = 2x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{\sqrt{x+2}+1}.$$

7. Обчислити $A = 9\left[\operatorname{tg}^2 \dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right]^{-1}$, якщо $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Розв'язати рівняння $\dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{3x}{2(2x+1)} = \dfrac{5}{2}$.

9. Знайти x в градусах, якщо $0° < x < 360°$ і $2\cos^2(x + 270°) = 3\sin(x + 270°)$.

10. Обчислити A, якщо $A = 4^B + 5^C$, де $B = \dfrac{1}{2\log_5 2}$, $C = \dfrac{1}{\log_7 5}$.

Варіант XXVII

1. Знайти x в градусах, якщо $90° < x < 270°$ і $\sin^2(180° + x) + 3\cos^2(180° + x) = 2$.

2. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 см, тангенс двогранного кута при основі дорівнює 4/3. Знайти площу повної поверхні піраміди.

3. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел A, B і C, де $A = 62$, $B = 102$ і $C = 42$.

4. В арифметичній прогресії 10 членів. Сума членів, розміщених на парних місцях, дорівнює 50, а членів, розміщених на непарних місцях, дорівнює 35. Визначити перший член і різницю прогресії.

5. Знайти корінь рівняння $\log_4 (x^2 + 3x - 4) = \log_4 \dfrac{x-1}{x+4}$.

6. Обчислити A, якщо $A = 10^B + 3^C$, де $B = 2/\log_3 10$ і $C = 1/\log_6 3$.

7. Знайти значення похідної функції $f(x) = \dfrac{\sin x + 2x}{\cos x - 3}$ у точці $x = 0$.

8. Визначити середину проміжку, на якому виконується нерівність $x^2 + 7 < 6x + y^2$, де $y = (7 - 2x)^{1/2}$.

9. Знайти квадрат відстані між точками, координати яких задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 0, \\ x^{-2} + y^{-2} = 8. \end{cases}$$

10. Знайти x із рівняння $8^{2/3} \cdot 2^3 \cdot (0{,}5)^{-2} \cdot x^{-1} = 2^7 \cdot 2^{-2}$.

Варіант XXVIII

1. Для перевезення 60 т вантажу з одного місця в інше треба кілька машин. Оскільки кожну машину недовантажували на 0,5 т, то додатково потрібно було завантажити ще 4 машини. Скільки машин було замовлено з самого початку?

2. Визначити середину проміжку, на якому виконується нерівність $\log_{0,25} \dfrac{1-2x}{x+1} < 0{,}5$.

3. Розв'язати рівняння $x = (16 - x^2 - 6x)^{1/2} - 2$.

4. Розв'язати рівняння $(2x + 1) : x + 2{,}5\, x : (2x + 1) = 3{,}5$.

5. На відрізку $[0°; 360°]$ знайти число різних коренів рівняння $7 + 4 \sin x : \cos^{-1} x + 3 : \cos (90° - 2x) = 0$.

6. Знайти суму і добуток чисел x, y, z, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 2, \\ 3x + 4y - 5z = 4, \\ x + 3y - 2z = -1. \end{cases}$$

7. Обчислити $A = \sin (90° - 2x)$, якщо $\sin (180° - x) : \cos (180° - x) = -2$.

8. Знайти коефіцієнти k і q рівняння прямої $y = kx + q$, яка перетинає гіперболу $y = 2{,}4/x$ у точках з абсцисами $x = 2$ і $x = -3$.

9. Дано рівняння відносно x: $x \cdot 3^y - x \cdot 3^x = 3^{y+1} - 3^{x+1}$, де $y = (x + 2)^{1/2}$. Знайти суму і добуток коренів цього рівняння.

10. При якому значенні параметра k система рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = k, \\ x^2 + y^2 = 117 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

ВІДПОВІДІ

Глава 1

1.001. 20. 1.002. 1. 1.003. 32. 1.004. 0,5. 1.005. 5. 1.006. 1. 1.007. 3. 1.008. 1. 1.009. 9. 1.010. 1. 1.011. 2. 1.012. 4. 1.013. 12. 1.014. 1. 1.015. 4. 1.016. 2. 1.017. 8. 1.018. 3. 1.019. 2. 1.020. 3. 1.021. 0,5. 1.022. 1. 1.023. 10. 1.024. 1. 1.025. 3. 1.026. 3. 1.027. 6. 1.028. 2. 1.029. 3. 1.030. 0,5. 1.031. 5/6. 1.032. 11. 1.033. 1. 1.034. 5/3. 1.035. 9. 1.036. 16. 1.037. 17/27. 1.038. 5. 1.039. 12. 1.040. 15/14. 1.041. 1. 1.042. 1/3. 1.043. 5. 1.044. 5. 1.045. 25. 1.046. 1. 1.047. 125. 1.048. 1/4. 1.049. 5. 1.050. —3/2.

Глава 2

2.001. $x-1$. 2.002. $2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2/(p-q)$. 2.003. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2/(a-b)$. 2.004. 0,2. 2.005. 0. 2.006. $1/(ab)$. 2.007. $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$. 2.008. y^2. 2.009. $(t+1)/t$. 2.010. —4. 2.011. $16x\sqrt{x}/(1-x^2)(x-1)$. 2.012. $x+1$. 2.013. $\sqrt{a-1}$. 2.014. $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})/(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$. 2.015. $\sqrt[m]{y}$. 2.016. $|z^{1/p}-z^{1/q}|$. 2.017. $\sqrt{x}$. 2.018. 0,04. 2.019. 16. 2.020. $2\sqrt[6]{a^5}/a$. 2.021. $1/\sqrt{x^2-1}$. 2.022. $-\sqrt{x}$ для $x\in(0;\ 2)$; $\sqrt{x}$ для $x\in(2;\ \infty)$. 2.023. $\sqrt{6x}$. 2.024. $\sqrt[3]{20x}$. 2.025. 1. 2.026. $1/\sqrt[12]{a^2b}$. 2.027. $\pm\sqrt[6]{2}$. 2.028. $2/(x^2-a^2)$. 2.029. $2\sqrt[3]{r}/r$. 2.030. —1. 2.031. $1/a$. 2.032. 5. 2.033. $4p-\sqrt{4p^2-1}$. 2.034. $\sqrt{a^2-1}$. 2.035. $1/(\sqrt{a}+\sqrt{2})$. 2.036. $-3n(m+p)$. 2.037. $-\sqrt{x}(1+2/x^2)$. 2.038. $(1-a)/\sqrt{a}$. 2.039. —4. 2.040. 0,1. 2.041. $-1/(a^2+a+1)$. 2.042. 1. 2.043. $(m/n)^{m+n}$. 2.044. 1. 2.045. $(1-\sqrt{x})/(1-x)$. 2.046. —1. 2.047. $(b+1)/(b-2a)$. 2.048. 0,5. 2.049. $q(p+q)$. 2.050. $1+3x^2$. 2.051. 5. 2.052. $1-x^2$. 2.053. $2/(1-p^4)$. 2.054. 1. 2.055. $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. 2.056. 1/2. 2.057. $(x-y)/(x+y)$. 2.058. 1. 2.059. $1/(xy)$. 2.060. $24/(5y-2x)$. 2.061. 20. 2.062. $2a+3$. 2.063. $1+2x$. 2.064. $(a-b)/(a+b)$. 2.065. $x+y$. 2.066. $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$. 2.067. $a^{5/6}$. 2.068. 1. 2.069. $a^{1/3}+b^{1/3}$. 2.070. $a-b$. 2.071. $(\sqrt{m}-\sqrt{n})/m$. 2.072. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$. 2.073. 1. 2.074. $\dfrac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$. 2.075. $\dfrac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}$. 2.076. 6. 2.077. 1/4. 2.078. 2. 2.079. $\sqrt{2}(m+3)$. 2.080. $a-b$. 2.081. $\sqrt{t^2-4}/(t+2)$. 2.082. —1. 2.083. $2x-1$. 2.084. 1. 2.085. 1. 2.086. —25, якщо $a>0$; 25, якщо $a<0$. 2.087. $-\sqrt{ac}$. 2.088. $\sqrt{1+x}$. 2.089. 2. 2.090. 3. 2.091. $(x^{1/3}+y^{1/3})/\sqrt[6]{x^5y^2}$. 2.092. $1/(x^2-1)$. 2.093. $2\sqrt{3}$. 2.094. 0. 2.095. $z^{1/(p-3)}$. 2.096. $\dfrac{a^2}{4(a^2-x)}$. 2.097. 2. 2.098. 1. 2.099. —1. 2.100. $z\times(z+1)(z+2)$. 2.101. $-\sqrt{2}/(2a)$. 2.102. $1-a$ для $a\in(-\infty;\ -1)$; $a-1$ для $a\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$. 2.103. $a/2$. 2.104. $(a+b)\times\sqrt[3]{b^2+2a^3}$. 2.105. —1. 2.106. 29/35. 2.107. $\dfrac{a^3}{2(a-1)}$. 2.108. —7/24. 2.109. 100. 2.110. 1/3. 2.111. $1/(ab)$. 2.112. $\sqrt[3]{8-t^3}/\sqrt{2}$. 2.113.

$\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$. 2.114. $16a^2$. 2.115. $(a+b)^2$. 2.116. $1/m^2$. 2.117. $-a^2$. 2.118. 1/2. 2.119. 3/5. 2.120. 31/3. 2.121. $\sqrt[12]{32}$. 2.122. $2\sqrt[6]{18}$. 2.123. 0. 2.124. 0. 2.135. 0. 2.136. 0. 2.137. $(a+b)/(ab)$. 2.138. $-3/4$. 2.139. 3/4. 2.140. 0,2. 2.141. 6. 2.142. $-\sqrt{6}/2$. 2.143. $a-b$. 2.144. $a+b$. 2.145. 1. 2.146. $2(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})(3+\sqrt{2})$. 2.147. $(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})(\sqrt{13}+3)$. 2.148. $-(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{3})/2$. 2.149. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})/2$. 2.150. $(2\sqrt{6}+1)(3-4\sqrt{2})/23$. 2.151. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})/a$. 2.153. 6. 2.154. 5. 2.156. 638. 2.157. а) $2\sqrt{3}/3$; б) 4. 2.158. $-\sqrt{a+1}/(a+3)$ при $-1<a<1$; $\sqrt{a+1}/(a+3)$ при $1<a<\infty$. 2.159. $1/(ab)$. 2.160. 1. 2.161. $\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$. 2.162. -2 при $a\in(-\infty;\ 0)$; 2 при $a\in(0;\ \infty)$. 2.163. $16a^4/x^2$. 2.164. $\sqrt{(x+3)/(x-3)}$. 2.165. $-\sqrt{(t+2)/(t-2)}$. 2.166. $(b^2-1)/\sqrt{b}$ при $b\in(0;\ 1)$; $(b^2+3)/\sqrt{b}$ при $b\in(1;\ \infty)$. 2.167. $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ при $m\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)$; $m^3/(m-\sqrt[3]{2})$ при $m\in(1;\ \sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};\ \infty)$. 2.168. $-(x^2+x+1)$ при $x\in(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 3)$; x^2+x+1 при $x\in(3;\ \infty)$. 2.169. mn. 2.170. $-a/2$ при $a\in(-\infty;\ -2)$; $a(a-1)/2$ при $a\in(-2;\ \infty)$. 2.171. $(x+y)/2$. 2.172. $(4a-16)/(a+4)$ при $a\in(4;\ \infty)$ і $\frac{(4-a)(a^2+16)}{2a(4+a)}$ при $a\in(-4;\ 4)$. 2.173. $1/(m+2)$ при $m\in(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(3;\ \infty)$; $-1/(m+2)$ при $m\in(0;\ 3)$. 2.174. $-1/x$ при $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2)$; $1/x$ при $x\in(2;\ 3)\cup(3;\ \infty)$. 2.175. -1 при $x\in[1;\ 2)$; 1 при $x\in(2;\ \infty)$. 2.176. $1/(a+1)$ при $a\in(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup(-1;\ 2)$; $1/(a+3)$ при $a\in(2;\ \infty)$. 2.177. $(x+3)/(x^2-x)$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $(2x^2+x+3)/(x+x^2)$ при $x\in(0;\ 1)$; $3/x$ при $x\in[1;\ \infty)$. 2.178. $(a+2)/(a-1)$. 2.179. $(a^2+1)/(a-1)$. 2.180. $1/(1-3x)$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$ при $x\in[0;\ 1/3)\cup(1/3;\ 1)$; $1/(x-1)$ при $x\in(1;\ \infty)$. 2.181. $\sqrt[6]{a^2-1}$. 2.182. $a^2x^2-b^2y^2$. 2.183. $\frac{3}{x(2x+3)}$, якщо $x\in(-\infty;\ -3/2)\cup(-3/2;\ 0)\cup(0;\ 3)$; $1/x$, якщо $x\in(3;\ \infty)$. 2.184. $-1/a$, якщо $a\in(-\infty;\ -5)$; $\frac{a+5}{a(3a-5)}$, якщо $a\in(-5;\ 0)\cup(0;\ 5/3)\cup(5/3;\ \infty)$. 2.185. $-(x+1)/x$, якщо $x\in(-\infty;\ -1)$; $(x+1)/(2-x)$, якщо $x\in(-1;\ 0)$; $(x+1)/(x-2)$, якщо $x\in(0;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. 2.186. p. 2.187. $1/(\sqrt[4]{a}-1)$. 2.188. $1/(x-x^2)$, якщо $x\in(0;\ 1)$; $1/(x^2-x)$, якщо $x\in(1;\ \infty)$. 2.189. $(r^2-r)/(r^2+1)$, якщо $r\in(-\infty;\ 0)$; $r/(1-r)$, якщо $r\in[0;\ 1)$; $r/(r-1)$, якщо $r\in(1;\ \infty)$. 2.190. $1/(z+2)$. 2.191. $1/(1+\sqrt[3]{a})$. 2.192. $a/(a+1)$. 2.193. $(\sqrt{x}-2)/(\sqrt{x}-3)$. 2.194. $1/(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a})$. 2.195. $\frac{a+2}{a^2(a-1)^2}$. 2.196. 2, якщо $x\in(-\infty;\ -1]$; $2x^2/(2x^2-1)$, якщо $x\in(-1;\ -\sqrt{2}/2)\cup(-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)\cup(\sqrt{2}/2;\ 1)$; 0, якщо $x\in(1;\ \infty)$. 2.197. $1/(\sqrt{b}+2)$. 2.198. $(1-b)/(1+b)$. 2.199. $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$. 2.200. $\sqrt[4]{x}$, якщо $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0$; $-\sqrt[4]{x}$, якщо $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0$. 2.201. $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$. 2.202. $(m-8)/2$. 2.203.

$1/(\sqrt[4]{x^2-1})$. **2.204.** 1. **2.205.** $(x^2-1)/(2x-b)$. **2.206.** $(\sqrt[3]{x-y})/(x+y)$. **2.207.** $(x^2-3x+2)/(3x)$. **2.208.** 1. **2.209.** $3-2\sqrt{x}$, якщо $x\in[0, 9)$; -3, якщо $x\in(9;\infty)$. **2.210.** 2, якщо $a\in(0;1)$; 2/3, якщо $a\in(1;\infty)$. **2.211.** $z^2/(z^2+z+1)$. **2.212.** 5. **2.213.** $-1/2$, якщо $x\in(-\infty;0)$; 1/2, якщо $x\in(0;\infty)$. **2.214.** -2, якщо $x\in(-\infty;0)$; 2, якщо $x\in(0;\infty)$. **2.215.** $-(z^2+9)(3-z)/(9z)$, якщо $z\in(-3;0)\cup(0;3)$; $2(z-3)/3$, якщо $z\in(3;\infty)$. **2.216.** $m/2$. **2.217.** $\frac{1}{a(3a+b)}$. **2.218.** $2\sqrt{2}$, якщо $x\in[2;4)$; $2\sqrt{x-2}$, якщо $x\in[4;\infty)$. **2.219.** 5. **2.220.** 1 при $0\leqslant b\leqslant a$, $a\neq 0$; $\sqrt{a+b}/(2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b})$ при $0<-b\leqslant a$. **2.221.** $x\sqrt{2}$. **2.222.** $\sqrt{5}/5$. **2.223.** $-1/\sqrt{a-2}$, якщо $a\in(2;3)$; $-\sqrt{a-2}$, якщо $a\in(3;\infty)$. **2.224.** $(3-x^2)/(x+2)$, якщо $x\in(-\infty;-2)$; $(5-x^2)/(x+2)$, якщо $x\in(-2;2)$; $(x^2-3)/(x+2)$, якщо $x\in[2;\infty)$. **2.225.** $-(x-3)$, якщо $x\in(-\infty;-1/3)\cup(-1/3;-1/5)\cup(-1/5;3)$; $x-3$, якщо $x\in[3;+\infty)$. **2.226.** $-3x$, якщо $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)$; $3x$, якщо $x\in(0;\infty)$. **2.227.** $(a+\sqrt{a^2-9})/3$. **2.228.** $\left(y-\frac{2}{y}\right)^2$. **2.229.** $\sqrt{2}$. **2.230.** 2. **2.231.** $\sqrt{3}/3$.

2.232. $-2a$, якщо $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$; $2a$, якщо $a\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$. **2.233.** $\sqrt{a^2-1}$. **2.234.** $-2-4\sqrt{3}$. **2.235.** $(1-a)/(2a)$, якщо $a\in(0;1)$; $(a-1)/2$, якщо $a\in(1;\infty)$. **2.236.** $(m-1)/(2m)$, якщо $m\in(0;1)$; $(1-m)/2$, якщо $m\in[1;\infty)$. **2.237.** $(1-a)/\sqrt{a}$, якщо $a\in(0;1)$; $(a-1)/\sqrt{a}$, якщо $a\in(1;\infty)$. **2.238.** $1/(x-\sqrt{2x}+1)$. **2.239.** $-\sqrt[4]{2}$. **2.240.** 1. **2.241.** $\sqrt[3]{4-x^2}$. **2.242.** $(z^2-5z+6)/(1-z)$, якщо $z\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;2)$; $z-2$, якщо $z\in[2;\infty)$. **2.243.** $x/(x-2)$. **2.244.** $a-b$. **2.245.** $-\sqrt{(x-2)/(x+2)}$. **2.246.** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$. **2.247.** $1+\sqrt[3]{a}$. **2.248.** $\sqrt{2}$. **2.249.** $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})$. **2.250.** $\sqrt{a}/(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})$. **2.251.** $2\sqrt[4]{y/x^2}$. **2.252.** 2,4. **2.253.** -1, якщо $x\in[1/8;1/4)$; 1, якщо $x\in(1/4;\infty)$. **2.254.** 3. **2.255.** 3. **2.256.** $x^3\sqrt[4]{a}$. **2.257.** $1/(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a})$. **2.258.** $1/(2\sqrt{b})$. **2.259.** 0. **2.260.** $\sqrt{p^2-q^2}/\sqrt{p}$. **2.261.** $\sqrt[3]{(1-x)/(3x)}$, якщо $x\in(0;1]$. **2.262.** 1,25. **2.263.** x^2+1. **2.264.** $(x+3)/(x-1)$. **2.265.** 1,1. **2.266.** 4/9. **2.267.** $1/(2y^3)$ при $y<2x$; $-1/(2y^3)$ при $y>2x$. **2.268.** $\sqrt{x}+1$. **2.269.** $-(a^3+\sqrt[4]{a^3})$. **2.270.** $\frac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, якщо $x\in(4;8)$; 1, якщо $x\in[8;\infty)$. **2.271.** 4. **2.272.** $1/\sqrt[8]{p-q}$. **2.273.** $-\sqrt{x}$, якщо $x\in(0;2/3)$; $\sqrt{x}$, якщо $x\in(2/3;\infty)$. **2.274.** 2. **2.275.** $x^2|\sqrt[3]{y}|$. **2.276.** $(\sqrt[3]{a}-1)/4$. **2.277.** 1. **2.278.** $\sqrt[3]{2n/(1+n)}$. **2.279.** $-2b(a+3\sqrt{ab})$. **2.280.** $\sqrt{a/(a+4b)}$. **2.281.** $\sqrt[4]{a}/6$. **2.282.** -1. **2.283.** 1. **2.284.** $\sqrt[4]{a/b}$ при $0<b<a$; $\sqrt[4]{b/a}$ при $0<a<b$. **2.285.** $y=\begin{cases}2 \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2\sqrt{x-1} \text{ при } 2<x<\infty.\end{cases}$ **2.286.** 11/3. **2.287.** $a=165{,}5$; $b=158{,}5$. **2.289.** $(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. **2.290.** $3b^2+a^4=4ac$. **2.294.** Виконується для всіх $n\in[0;3m]$, $m>0$. **2.304.** Виконується для всіх $q\in[0;5p]$, $p>0$. **2.306.** 3^3-2^3. **2.307.** $n/(n+1)$. **2.310.** $A=1$, $B=2$, $C=0$. **2.312.** $(x+1)/x$, якщо

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$; $-(x+1)/x$, якщо $x \in (-1; 0)$. **2.313.** -1, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $(2+x-x^3)/(x^3+x)$, якщо $x \in [-1; 0) \cup (0; 1)$; 1, якщо $x \in [1; \infty)$. **2.314.** $-(x+1)$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $x+1$, якщо $x \in [-1; 1)$; $2x^2+x-1$, якщо $x \in [1; \infty)$. **2.315.** 6, якщо $x \in (-\infty; 0)$; $6-2x$, якщо $x \in [0; 6)$; -6, якщо $x \in [6; \infty)$. **2.316.** $2\sqrt{2}/(4-x)$, якщо $x \in [2; 4)$; $2\sqrt{x-2}/(x-4)$, якщо $x \in (4; \infty)$. **2.317.** $m-n$ при $0 < m/n \leqslant 1$ і $m/n > 2$; $n-m$ при $1 < m/n < 2$. **2.318.** $2x^2-a^2$ при $x < -|a|$; $-a^2$ при $x > |a|$. **2.319.** $x-2$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $(x^2+4)/(x-2)$, якщо $x \in (-1; 1)$; $-(x+2)$, якщо $x \in (1; 2)$; $x+2$, якщо $x \in (2; \infty)$. **2.320.** $(-2x^2+2x-3)/x$, якщо $x \in (-\infty; 0)$; $(3+2x)/x$, якщо $x \in (0; 2)$; $(2x^2-2x+3)/x$, якщо $x \in [2; \infty)$. **2.321.** $6-4a$, якщо $a \in [0; \sqrt{2})$; $2(a-1)^2$, якщо $a \in [\sqrt{2}; \infty)$. **2.322.** -4, якщо $y \in (-\infty; 3)$; $2y-10$, якщо $y \in [3; 9)$; 8, якщо $y \in [9; \infty)$. **2.323.** $5/(2\sqrt{x})$, якщо $x \in (0; 4)$; $(2x-3)/(2\sqrt{x})$, якщо $x \in [4; \infty)$. **2.324.** $(1+x-x^2)/(x+1)$, якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; $(x^2+x-1)/(x+1)$, якщо $x \in [1; \infty)$; $(1-x-x^2)/(x+1)$, якщо $x \in (-1; 0)$. **2.325.** $(n+1)/n$ при $n \neq 0$ і $n \neq 1$. **2.326.** $1/\sqrt{a}$ при $\sqrt{2a} > 5\sqrt[3]{b}$; $-1/\sqrt{a}$ при $\sqrt{2a} < 5\sqrt[3]{b}$. **2.327.** $(x+1)/(1-x)$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $(x+1)/(x-1)$, якщо $x \in [-1; 0)$; $(x-1)/(x+1)$, якщо $x \in [0; \infty)$. **2.328.** $(2-x)/2$, якщо $x \in (-\infty; -2)$; $-(x^2+2x+8)/(2x)$, якщо $x \in [-2; 0)$; $(x^2+2x+8)/(2x)$, якщо $x \in (0; \infty)$. **2.329.** $x/(x-1)$, якщо $x \in (-\infty; -1)$; $x/(1-x)$, якщо $x \in (-1; 0)$; $-x/(x+1)$, якщо $x \in [0; 1)$; $x/(x+1)$, якщо $x \in (1; \infty)$. **2.330.** $(4-x^2)/(x^2+4x-4)$, якщо $x \in (-\infty; 1)$, $x \neq -2 \pm 2\sqrt{2}$; $(x+2)/(2-x)$, якщо $x \in [1; 2)$; $(x+2)/(x-2)$, якщо $x \in (2; \infty)$. **2.331.** $-x$ при $0 < x < 1$; x при $x > 1$. **2.332.** $(x-1)/x$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$; $(1-x)/x$, якщо $x \in (0; 1)$. **2.333.** $-(z+1)/z$, якщо $z \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; $(z+1)/z$, якщо $z \in [-1; 0) \cup (1; \infty)$. **2.334.** 1 при $a > 0$, $-\sqrt[6]{a} \leqslant b < \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a}}$. **2.335.** $1/a$, якщо $a \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$; a, якщо $a \in [-1; 1)$. **2.336.** $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$, якщо $x \in (0; \infty)$, $y \in (0; \infty)$; $-(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})$, якщо $x \in (0; \infty)$, $y \in [-x/2; 0)$. **2.337.** $2a$, якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$; $-2a$, якщо $a \in (0; 3)$. **2.338.** $1/\sqrt[3]{y}$, $y \neq 0$. **2.339.** $\dfrac{4a^2+3}{9(a^2+1)}$. **2.340.** $2/(2-a)$ при $1 \leqslant a < 2$; $2\sqrt{a-1}/(a-2)$ при $2 < a < \infty$. **2.341.** $-9z^3$, якщо $z \in (-\infty; -1/2] \cup (0; 1/2)$; $7z^3+2$, якщо $z \in (-1/2; 0) \cup (1/2; \infty)$. **2.342.** $-2/\sqrt{2x+1}$, якщо $x \in (-1/2; 3/2)$; $-\sqrt{2x+1}/2$, якщо $x \in (3/2; \infty)$. **2.343.** $1/\sqrt{x}$ при $x > 0$, $0 \leqslant y < 4x^2$; $-1/\sqrt{x}$ при $x > 0$, $y > 4x^2$. **2.344.** $(t-1)/(3t-1)$, якщо $t \in [1/6; 1/3) \cup [1; \infty)$; $(1-t)/(3t-1)$, якщо $t \in (1/3; 1)$. **2.345.** $-1/x$, якщо $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$; $1/x$, якщо $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; \infty)$. **2.346.** $1-\sqrt{x}$, якщо $x \in [0; 1)$; $\sqrt{x}-1$, якщо $x \in [1; \infty)$. **2.347.** x, якщо $x \in (0; 1/2)$; $-x$, якщо $x \in (1/2; \infty)$. **2.348.** $x^2-4x-12$ при $-\infty < x < 2$; $(x+2)^2$ при $2 < x < \infty$. **2.349.** $x^2+\sqrt{2}$. **2.350.** $(9-2x)/x$ при $-\infty < x < 0$; $(2x-9)/x$ при $0 < x < 3/2$; $(2x+3)/x$ при $3/2 < x < \infty$. **2.351.** x^4. **2.352.** $-2\sqrt{x}/3$. **2.353.** $\sqrt{2}/(1-3a)$ при $1/6 \leqslant a < 1/3$; $\sqrt{12a-2}/(3a-1)$ при $1/3 < a < \infty$. **2.354.** $-(\sqrt{1-4p^2}+1)^2/(4p^2)$ при $-1/2 \leqslant p < 0$; -1 при $0 < p < 1/2$. **2.355.** $|\sqrt[4]{a} - \sqrt[6]{b}|$, $b > 0$. **2.356.** $4x/(x-4)$ при $4 < x < 8$; $2x/\sqrt{x-4}$ при $8 \leqslant x < \infty$. **2.358.** $(y-x)(z-y)(x-z)$. **2.359.** $(x-y)(z-x)(y-z)$.

3.063. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right)$. **3.064.** $-\sin^2\alpha$. **3.065.** 1/8. **3.066.** $-\operatorname{tg}(\alpha/8)$. **3.067.** $2\sin\alpha$. **3.068.** $\sin 2\alpha$. **3.069.** $(-1/2)\sin 8\alpha$. **3.070.** $(1/4)\sin(3\alpha/2)$. **3.071.** $\sin\alpha\sin 4\beta$. **3.072.** $\cos^{-3}2x$. **3.073.** $-\sin 2\alpha\sin 4\beta$. **3.074.** $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$. **3.075.** $4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}$. **3.076.** $-(\sqrt{2}/4)\operatorname{tg}\alpha$. **3.077.** $(\sqrt{2}/2)\sin(\alpha/2)$. **3.078.** $2\operatorname{tg}\alpha$. **3.079.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. **3.080.** $\operatorname{tg}\frac{m+n}{2}\alpha$. **3.081.** 2. **3.082.** $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$. **3.083.** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. **3.084.** $\operatorname{ctg}^4\alpha$. **3.085.** $0{,}5\sin^{-2}(\alpha/2)$. **3.086.** $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2}$. **3.087.** 1. **3.088.** 1. **3.089.** 1. **3.090.** $\sin^2\alpha$. **3.091.** $\frac{\sin^2 2\alpha}{4}$. **3.092.** $-\cos\alpha$. **3.093.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **3.094.** $\operatorname{tg}^2 2\alpha$. **3.095.** $-(1/4)\sin 8\alpha$. **3.096.** $2/\sin^3 2\alpha$. **3.097.** $2/\cos^3\alpha$. **3.098.** 0. **3.099.** $-\operatorname{tg}^4\alpha$. **3.100.** $(1/\sqrt{2})\sin 2\alpha$. **3.101.** $\cos 4\alpha$. **3.102.** $4\cos 2\alpha$. **3.103.** $\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.104.** $\cos 4\alpha$. **3.105.** 2. **3.106.** $\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.107.** $\operatorname{tg}4\alpha$. **3.108.** $\sin^2\alpha$. **3.109.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **3.110.** $\operatorname{ctg}4\alpha$. **3.111.** $(1/2)\operatorname{ctg}^4\alpha$. **3.112.** $2\operatorname{tg}(\alpha/2)$. **3.113.** $2\cos\alpha$. **3.114.** $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$. **3.115.** $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha$. **3.116.** $-16\operatorname{ctg}2\alpha\sin^{-3}2\alpha$. **3.117.** $\operatorname{tg}^8\alpha$. **3.118.** $4\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)\sin^{-2}\alpha$. **3.119.** $4\sin(30^\circ-\alpha)\times\sin(30^\circ+\alpha)\cos^{-2}\alpha$. **3.120.** $4\cos 2\alpha\sin^{-2}2\alpha$. **3.121.** $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. **3.122.** $4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$. **3.123.** $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. **3.124.** $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **3.125.** $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.126.** $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}$. **3.127.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **3.128.** $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **3.129.** $2\cos\alpha\cos 3\alpha$. **3.130.** $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$. **3.131.** $\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos(\pi/4-2\alpha)}{\cos 4\alpha}$. **3.132.** $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{ctg}3\alpha$. **3.133.** $2\sin(\alpha-\pi/6)$. **3.134.** $\operatorname{tg}5\alpha$. **3.135.** $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$. **3.136.** $2\cos 2\alpha\times\sin 6\alpha\sin 10\alpha$. **3.137.** $\operatorname{ctg}(17\alpha/2)$. **3.138.** $-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\sin(13\alpha/2)$. **3.139.** $-4\sin(\alpha/2)\sin\alpha\cos(9\alpha/2)$. **3.140.** $\operatorname{tg}(29\alpha/2)$. **3.141.** $4\sin 3\alpha\times\cos 2\alpha\cos\alpha$. **3.142.** $4\cos(\alpha/2)\cos\alpha\sin(13\alpha/2)$. **3.143.** $4\cos(3\alpha/2)\times\cos 2\alpha\cos(17\alpha/2)$. **3.144.** $8\cos^4 2\alpha$. **3.145.** $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. **3.146.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos(\pi/4+2\alpha)}{\cos 2\alpha}$. **3.147.** $4\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$.

3.153. 2. **3.154.** 4. **3.155.** $2\sqrt{3}$. **3.156.** 7/25. **3.157.** $2\sqrt{3}$. **3.158.** $-17\sqrt{2}/26$. **3.159.** $7\sqrt{2}/26$. **3.160.** 65/113. **3.161.** 26/87. **3.162.** 0,96. **3.163.** $1-p^2$. **3.164.** 57/5. **3.165.** 2. **3.166.** $-22/9$. **3.167.** $\pi-\operatorname{arctg}(2/3)$. **3.169.** $\pi-\operatorname{arctg}5$. **3.170.** 23/32. **3.171.** $3\pi/4$. **3.172.** $\sqrt{5}/20$. **3.174.** $-4\sqrt{6}/23$. **3.176.** $\alpha+\beta=\pi/4$. **3.177.** 2. **3.178.** 2. **3.181.** $x-y=xy$. **3.184.** $1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$. **3.185.** m^4-4m^2+2.

3.240. $2|\operatorname{ctg}\alpha|$. **3.241.** $-0{,}5\sin 2\alpha$. **3.242.** $|\sin\alpha-\sin\beta|$. **3.243.** -1. **3.244.** 1. **3.245.** $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.246.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **3.247.** 1. **3.248.** $\sin 4x\cos^{-2}4x$. **3.249.** $-\cos^2 4\alpha$. **3.250.** $-2\sin^2 2\alpha$. **3.251.** $\cos(40^\circ+2\alpha)$. **3.252.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$. **3.253.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.254.** $\sin 4\alpha$. **3.255.** $\cos 8\alpha$. **3.256.** $-\sin 4\alpha$. **3.257.** $\operatorname{tg}^4(\alpha/2)$. **3.258.** $2\sin(2\alpha-\pi/6)$. **3.259.** $-1/2$. **3.260.** $-2\operatorname{ctg}^2\alpha$. **3.261.** $\operatorname{tg}(\pi/4+2\alpha)$. **3.262.** $8\sqrt{3}$. **3.263.** $\sqrt{3}/2$. **3.264.** $\operatorname{tg}5x$. **3.265.** $\sin 3x$. **3.266.** $\cos 3x$. **3.267.** $2|\cos^{-1}2\alpha|$. **3.268.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.269.** $\operatorname{tg}(\alpha+30^\circ)\operatorname{tg}(\alpha-30^\circ)$. **3.270.** $2\sin 2\alpha$. **3.271.** $2|\operatorname{ctg}4\alpha|$. **3.272.** $\operatorname{ctg}(\alpha-\pi/4)$. **3.273.** 1/4. **3.274.** $\sin(\alpha+\beta)$. **3.275.** а) $\operatorname{tg}(\alpha/2)$; б) $-\operatorname{tg}(\alpha/2)$. **3.276.** $-\sin 2\alpha$. **3.277.** $\sin 4\alpha$. **3.278.** а) $-2\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\operatorname{tg}\alpha$. **3.279.** $\cos(\alpha/2)$. **3.280.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$. **3.281.** $(1/8)\sin 8\alpha\times\sin 4\alpha$. **3.282.** 1. **3.283.** $-\sin 6\alpha$. **3.284.** 1, якщо $\operatorname{ctg}x>0$; -1, якщо $\operatorname{ctg}x<0$. **3.285.** $2\sin(6\alpha-60^\circ)$. **3.286.** $(2/\sqrt{3})\sin(4\alpha-60^\circ)$. **3.287.** $-8\cos 4\alpha$. **3.288.** $\dfrac{4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^3 x}$.

3.289. $\dfrac{8\sin(x-45^\circ)\sin(x+45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^4 x}$. **3.290.** $-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.291.** $2\sin(\alpha/4)$. **3.292.** $8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.293.** $\sin^2(\alpha-\beta)$. **3.294.** $\dfrac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}\times\operatorname{tg}2\alpha$. **3.295.** $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. **3.296.** $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$. **3.297.** $-2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta)$. **3.298.** $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.299.** $4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$. **3.300.** $-\dfrac{4\sin^2(\pi/4-4\alpha)}{\sin 8\alpha}$. **3.301.** $\dfrac{2\sqrt{2}\sin(\pi/4-2\alpha)\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **3.302.** $2\operatorname{ctg}4\alpha$. **3.303.** $\cos^2(\alpha-\beta)$.

3.304. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos(\pi/4-2\alpha)}{\cos 2\alpha}$. **3.305.** $8\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **3.306.** а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. **3.307.** $2\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.308.** $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$. **3.309.** $4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.310.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. **3.311.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **3.312.** $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4\alpha\right)$. **3.313.** $\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$. **3.314.** $\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ)$. **3.315.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$. **3.316.** $-\sin 4\alpha$. **3.317.** $\operatorname{ctg}^3\alpha$. **3.318.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha$. **3.319.** $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\times\sin(4\alpha-45^\circ)$. **3.320.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos(\pi/4+\alpha)\cos^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}$. **3.321.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$. **3.322.** $\dfrac{4\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$. **3.323.** $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)$. **3.324.** $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$. **3.325.** $4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha)$. **3.326.** $\cos\dfrac{(m+n)\alpha}{2}\cos\dfrac{(m-n)\alpha}{2}$. **3.327.** $\dfrac{\sqrt{2}\sin(\pi/4+\alpha)}{\cos\alpha}$. **3.328.**

$\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.329.** $\sin 4\alpha$. **3.330.** $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$. **3.331.** $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin 70^\circ$. **3.355.** 3/2. **3.356.** 3/16. **3.357.** 1/4. **3.358.** 1. **3.359.** 1. **3.360.** 0. **3.361.** 1. **3.362.** — 85/44. **3.363.** —50/7. **3.364.** $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$ і $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$. **3.365.** $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{27}{7\sqrt{130}}$. **3.366.** $(3n-n^3)/2$. **3.367.** —9/4. **3.375.** $\operatorname{tg}(x/2)=2$ або $\operatorname{tg}(x/2)=-1/3$. **3.376.** $(1-m)/(1+m)$. **3.377.** $(m^2-1)/2$. **3.378.** $\frac{p+q}{p-q}\times\operatorname{ctg}\alpha$. **3.379.** $(1+6m^2-3m^4)/4$. **3.380.** $\sin 2\alpha=2pq/(p^2+q^2)$; $\cos 2\alpha=(q^2-p^2)/(q^2+p^2)$; $\operatorname{tg} 2\alpha=2pq/(q^2-p^2)$. **3.381.** а) —3/5; б) 4/5. **3.382.** а) 4/5; б) 3/5. **3.383.** $\frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.384.** —2. **3.386.** —1. **3.387.** —2/3. **3.388.** 1/2. **3.390.** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$. **3.392.** 1/3. **3.393.** $f(\alpha)=p+2$. **3.394.** $f(\alpha)=7/9$. **3.410.** $(3/4)\sin 8\alpha$. **3.411.** $2\sin^3 2\alpha$. **3.412.** $-\cos^2 2x$. **3.413.** $(3/4)\sin 4\alpha$. **3.414.** $\frac{2\sqrt{2}\sin(\pi/4+2\alpha)\cos^2(\pi/4-\alpha)}{\sin 2\alpha}$. **3.415.** $8\cos 16\alpha\cos^3 2\alpha$. **3.441.** $-a/b$. **3.442.** $-b/a$. **3.443.** $-2\sqrt[4]{2}/3$. **3.444.** —0,007. **3.445.** 6/25. **3.446.** 6/25. **3.447.** $3\pi/4$. **3.448.** $-\pi/4$. **3.449.** $\frac{1-a^2}{2a}$. **3.450.** 0,009. **3.451.** 1/8. **3.452.** $(1-\sqrt{5})/2$. **3.453.** $\sqrt{10}-3$. **3.454.** 0,98. **3.455.** —119/120. **3.456.** 1/5. **3.457.** —2. **3.458.** 11/2. **3.459.** $-2\sqrt{5}/5$. **3.460.** $-2\sqrt{5}/5$. **3.461.** $2a/b$. **3.462.** —1/2. **3.463.** 1) $\operatorname{ctg}(x/2)=\sqrt{2}/2$; 2) $\operatorname{ctg}(x/2)=3-2\sqrt{2}$. **3.465.** $2m/(1+m^2)$. **3.466.** $(3m^2+1)/4$. **3.467.** $m(m^2+1)/2$. **3.468.** $2(1-m^2)$. **3.469.** —38/125. **3.475.** $2+\cos 2\alpha$. **3.476.** $1/\sqrt{2}$ при $\alpha=\pi/16$. **3.477.** 2 при $\alpha=\pi/16$. **3.481.** 2 при $\alpha=\pi/8$. **3.482.** 1/2 при $\alpha=\pi/4$. **3.484.** —76/125. **3.485.** 4 при $\alpha=\pi/4$. **3.486.** 2 при $\alpha=\pi/4$. **3.487.** 41/125. **3.490.** 1/4 при $\alpha=\pi/4$. **3.491.** 1/2 при $\alpha=\pi/4$. **3.492.** $f(x)=\sin^2\alpha$. **3.493.** $\frac{\sin(n+1)2\alpha\cos 2n\alpha}{\sin 2\alpha}$. **3.495.** 2.

Глава 4

4.001. 9. **4.002.** 119/3. **4.003.** 21 раз. **4.004.** 1) 2, —1, —4; 2) —10, —7, —4. **4.005.** 7; 1) 1, 6, 11; 2) 7, 10, 13. **4.006.** За 8 год. **4.007.** 3, 4. **4.008.** 7, —14, 28, —56. **4.009.** 1/8. **4.010.** 3, 3/2, 3/4. **4.011.** 1/3, 2/3, 1. **4.012.** 44. **4.013.** 120. **4.014.** 1, 9, 17. **4.015.** —20 100. **4.016.** 1) 7, —28, 112, —448; 2) $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. **4.017.** 3, —6, 12, —24. **4.018.** 5. **4.019.** 1) 6, 1/4; 2) —6, —1/4. **4.020.** 5, 405. **4.021.** 10; 5, 15, 25. **4.022.** 1) 3, 4; 2) 48, 1/4. **4.023.** а) $x_1=1/2$, $x_2=-7/9$; б) $x_1=1/3$; $x_2=2/3$. **4.024.** 9 або 31. **4.025.** 3/16, 1/4. **4.026.** 1, 2, 3, 4, ... **4.027.** 37,5 або 52,5. **4.028.** 6. **4.029.** 810. **4.030.** 1/5. **4.031.** 9. **4.032.** 1) 4, 5; 2) —79/7, —37/14. **4.033.** 6, 3, 3/2, ... **4.034.** 3, 9, 15. **4.035.** 4, 12. **4.036.** 1) 3, 2; 2) 12, 1/2. **4.038.** Так; $n+m$. **4.039.** 14. **4.040.** 1) 1, 3, 9; 2) 1/9, 7/9, 49/9. **4.041.** 7. **4.042.** 82 350. **4.043.** 6, —1/2. **4.044.** 1) 3, 6, 12, 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75;

2,25. **4.045.** 5103 або 7/81. **4.046.** 1) 4, 8, 16; 2) 4/25, —16/25, 64/25. **4.047.** 1) 8, 4, 2; 2) 2, 4, 8. **4.049.** 127/8. **4.050.** 70 336. **4.051.** $2n + \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n}$. **4.052.** S_1S_2. **4.055.** $S^2/(2S - 1)$. **4.056.** 2. **4.061.** 7. **4.062.** 1) $12 + 24 + 48 + 96$; 2) $\frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2}$. **4.063.** 7. **4.064.** 1) 3, 6, 12; 2) 27, 18, 12. **4.065.** $\frac{(a + b)S - 2ab}{2S - (a + b)} S$. **4.066.** $3n$. **4.067.** 1/9, 1/6, 1/3. **4.068.** —2. **4.069.** 931. **4.070.** 41. **4.071.** 1064. **4.072.** Менше 2. **4.073.** $25\frac{25}{27}$. **4.075.** 101. **4.077.** 2, —6, 18, —54 або —54, 18, —6, 2. **4.078.** $x = \sqrt[d]{q}$; завжди. **4.079.** $2^{n+1}(n - 1) + 2 - 0{,}5n(n + 1)$. **4.080.** $3^{n+1}(n - 1) + 3$. **4.081.** $(S/\sigma)^{n/2}$. **4.082.** 9. **4.084.** 0. **4.085.** У 7381 раз.

Глава 5

5.001. а) $x = 4$; б) $x = 7$. **5.002.** а) $x = 5$; б) $x = 5$. **5.003.** а) $x = 5$; б) $x = 6$; $x = 11$. **5.004.** а) $x = 8$; б) $x = 7$. **5.005.** а) $x = 5$; б) $x = 7$. **5.008.** 240; 3-й доданок. **5.009.** $C_{10}^{8}a^2 = 45a^2$. **5.010.** $15/28 < x < 10/13$. **5.011.** 924. **5.012.** $252ab$. **5.013.** 1547/1024. **5.014.** $x = 4$. **5.015.** $A_{16}^{2} = 240$. **5.016.** 5. **5.017.** 55 440. **5.018.** 42. **5.019.** 1140. **5.020.** 968. **5.021.** 364. **5.022.** 64. **5.023.** 240. **5.024.** 124. **5.025.** 32 760. **5.026.** 25!/20!. **5.027.** 3136. **5.028.** 896. **5.029.** 8!. **5.030.** $x = 8$; $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **5.031.** $x = 10$. **5.032.** $x = 7$. **5.033.** а) $x = 5$; $y = 7$; б) $x = 5$; $y = 3$. **5.034.** а) $x = 8$; $y = 3$; б) $x = 7$; $y = 3$. **5.035.** а) $x = 7$; $y = 3$; б) $x = 7$; $y = 3$. **5.037.** 6. **5.038.** 7290. **5.039.** $x_1 = \sqrt{2}/4$; $x_2 = 5\sqrt{5}$. **5.040.** 252. **5.041.** $U_3 = 10z^2$, $V_4 = 20z^2$. **5.042.** 9. **5.043.** $x = 2$. **5.044.** $30!/(10!)^3$. **5.045.** 42. **5.046.** 9!. **5.047.** $30! - 2 \cdot 29!$. **5.048.** 2520. **5.049.** $12!/(2!)^6$. **5.050.** 204. **5.051.** $2 \cdot 9!$. **5.052.** 2 027 025. **5.053.** 5^6; $6 \cdot 4^5$. **5.054.** 2^{10}. **5.055.** 16^{100}. **5.056.** 40. **5.057.** $80!/(3! \cdot 75!)$. **5.058.** 10!/48. **5.059.** 3^6; 6!. **5.060.** 2304. **5.061.** 15 368. **5.062.** $10 \cdot 15!/7!$. **5.063.** $28!/(7!)^4$. **5.064.** 15 015. **5.065.** 3^5. **5.066.** 10^8. **5.067.** $16!/(2^6 \cdot 3^2)$. **5.068.** 420. **5.069.** 1800. **5.070.** 105. **5.071.** 62. **5.072.** $9 \cdot 10^6$. **5.073.** 36. **5.074.** 60. **5.077.** $(n + 1)! - 1$. **5.079.** 2^{36}. **5.080.** $314\,925 \cdot 10^5$, 9-й доданок. **5.081.** $5/8 < x < 20/21$. **5.082.** 3003. **5.083.** $2(6!)^2$. **5.084.** 2^{200}. **5.085.** 8^6; $8^6 - 13 \cdot 7^5$. **5.086.** $2(11!)^2$. **5.088.** 10!/4. **5.089.** 23. **5.090.** $2^8 \cdot 8!$.

Глава 6

6.001. $x_1 = 5$, $x_2 = -55/16$. **6.002.** $x_1 = a + b$, $x_2 = (a + b)/2$. **6.003.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$. **6.004.** $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm \sqrt[4]{24}/2$. **6.005.** $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. **6.006.** $x_1 = (m + n)/(m - n)$, $x_2 = (m - n)/(m + n)$. **6.007.** $x_{1,2} = \pm a\sqrt{b}$, $x_{3,4} = \pm b\sqrt{a}$. **6.008.** $x = 0$. **6.009.** $y_1 = 0$, $y_{2,3} = a(-9 \pm \sqrt{5})/4$. **6.010.** $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt[3]{6}$. **6.011.** $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3\sqrt{21}/7$. **6.012.** $x = -1$. **6.013.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1/3$. **6.014.** $x = 0$. **6.015.** $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 38/11$. **6.016.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$. **6.017.** Якщо $n = p$, то x — будь-яке число, крім n; якщо $n \neq p$, то $x_1 = m$, $x_2 = -m$, $x_3 = m + n + p$. **6.018.**

$x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$. **6.019.** $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. **6.020.** Якщо $a \neq b$, то $x_1 = 2b - a$, $x_2 = 2a - b$; якщо $a = b$, то коренів немає. **6.021.** $x_1 = -2$, $x_2 = -1/8$. **6.022.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. **6.023.** $x_1 = 0$, $x_{2,3} = -3 \pm 2\sqrt{3}/3$. **6.024.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$, $x_{3,4} = (-11 \pm \sqrt{105})/4$. **6.025.** Якщо $a = b$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq b$, то $x_1 = 0$, $x_2 = a + b$. **6.026.** $x_1 = a + 1$, $x_2 = (a + 1)/a$. **6.027.** Якщо $a \neq 0$, то $x_1 = 3a$, $x_2 = -2a$; якщо $a = 0$, то коренів немає. **6.028.** Якщо $b \neq 0$, то $x_1 = a + b$, $x_2 = (a^2 - b^2)/(2b)$; якщо $b = 0$, то $x = a$. **6.029.** $x_1 = a$, $x_2 = (1 - a^2)/a$. **6.030.** $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. **6.031.** $x = 4$. **6.032.** $x = 5$. **6.033.** $x = -1$. **6.034.** $x = 7$. **6.035.** $x_1 = a$, $x_2 = (4a - b)/3$. **6.036.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. **6.037.** $x = 0$. **6.038.** $x = 3$. **6.039.** $x = 5/3$. **6.040.** $x = 9$. **6.041.** $x_1 = -61$, $x_2 = 30$. **6.042.** $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. **6.043.** $x_1 = -7$, $x_2 = 7$. **6.044.** $x_1 = 6$, $x_2 = -2(\sqrt[3]{4} + 1)/5$. **6.045.** $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$. **6.046.** $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$. **6.047.** $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. **6.048.** $x_1 = 8$, $x_2 = 27$. **6.049.** $x = 2$. **6.050.** $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. **6.051.** $x_1 = 8$, $x_2 = 7$. **6.052.** $x = 4$. **6.053.** $x = 8$. **6.054.** $x = 64$. **6.055.** $x = 1024$. **6.056.** $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. **6.057.** $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$. **6.058.** $x = 1$. **6.059.** $z_1 = 2$, $z_2 = -1/511$. **6.060.** $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. **6.061.** $x = 64$. **6.062.** $x_{1,2} = \pm 1$. **6.063.** $x = 64$. **6.064.** $x = -1$. **6.065.** $x = 2$. **6.066.** $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. **6.067.** (0,6; 0,3), (0,4; 0,5). **6.068.** (−1; 2), (2; −1). **6.069.** (1/2; 1/3), (1/3; 1/2). **6.070.** (2; 3), (3; 2). **6.071.** (2; 1), (−1; −2). **6.072.** (4; 3), (4; −3). **6.073.** (7; 3), (−7; −3). **6.074.** (4; 1), (10/3; 2/3). **6.075.** (1; 2), (2; 1). **6.076.** (1; 2). **6.077.** (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1). **6.078.** (2; 3), (3; 2). **6.079.** (1; 2), (2; 1). **6.080.** (3; 2), (−3; −2). **6.081.** (4; 1), (1; 4). **6.082.** (2; 1), (2; −1), (1; $\sqrt{2}$), (1; $-\sqrt{2}$). **6.083.** (1/4; 1/6), (1/12; 1/3), (−5/24; −7/24), (−3/8; −1/8). **6.084.** (2; 6), (1; 3). **6.085.** (2; 4), (4; 2). **6.086.** (4; 1), (1; 4). **6.087.** (2; 1), (−2; −1). **6.088.** (3; 2), (−3; −2). **6.089.** ($\sqrt[3]{m}$; −1), (−1; $\sqrt[3]{m}$). **6.090.** Якщо $ab = 0$, то розв'язків немає; якщо $ab \neq 0$, то $x = 1/a$, $y = b$. **6.091.** (5; 3). **6.092.** (−4; −4), (−6; −2). **6.093.** (2; 3; 4). **6.094.** (5; 1), (−5; −1). **6.095.** (1; 2; 3). **6.096.** (1/2; 4). **6.097.** (2; −1; 1). **6.098.** (2; −1), (−1; 2). **6.099.** (9; 1), (1; 9). **6.100.** (41; 40). **6.101.** (12; 4), (34; −30). **6.102.** (3; 1). **6.103.** (1; 4). **6.104.** (1; 64), (64; 1). **6.105.** (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1). **6.106.** (4; 1), (1; 4), ($2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$), ($2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$). **6.107.** (1; 9), (9; 1). **6.108.** (5; 4). **6.109.** (1; 27), (27; 1). **6.110.** (41; 40). **6.111.** (4; 1), (1; 4). **6.112.** (1; 81), (81; 1). **6.113.** Якщо $a \neq 0$, то $x_1 = 0$, $y_1 = a$, $x_2 = 2 - a$, $y_2 = 2$; якщо $a = 0$, то $x = y = 2$. **6.114.** (4; 1), (1; 4). **6.115.** (1; 8), (8; 1). **6.116.** (16; 1). **6.117.** $(9a^2; a^2)$. **6.118.** (124; 76). **6.119.** (4; 1). **6.120.** $(b^2 - 2ac)/c^2$. **6.121.** $cx^2 + bx + a = 0$. **6.122.** $a^2x^2 + (ab - ac)x - bc = 0$. **6.123.** $ax^2 + (b - 2a)x + (c - b + a) = 0$. **6.124.** $p = q = 0$; $p = 1$, $q = -2$. **6.125.** $A_1 = 1$, $B_1 = -2$; $A_2 = 0$, $B_2 = 0$. **6.126.** $k = 2$. **6.127.** $p = 3$; $x = 1$. **6.128.** $a = 1$ і $a = 1/2$. **6.129.** $a = -6$. **6.130.** $c = -15$. **6.131.** $a = 4$. **6.132.** $p_1 = -6$, $p_2 = 6$. **6.133.** 215/27. **6.134.** $b = 2$. **6.135.** $c = 1/3$. **6.136.** $x = 1$. **6.137.** $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{7}/7$. **6.138.** $x_1 = x_2 = 3$, $x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$. **6.139.** $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. **6.140.** $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. **6.141.** $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = (-2 \pm \sqrt{66})/2$. **6.142.** $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. **6.143.** $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. **6.144.** $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. **6.145.** $x = 1$. **6.146.** $x = 0$. **6.147.** $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_{3,4} = (-3 \pm \sqrt{73})/2$. **6.148.** $x_1 = 2$,

$x_2 = 1/2$. **6.149.** $x_{1,2} = -1$. **6.150.** $u_1 = 1$, $u_{2,3} = (1 \pm \sqrt{33})/4$. **6.151.** Якщо $m = 1$, то x — будь-яке число, крім ± 1, ± 2; якщо $m \neq 1$, то коренів немає. **6.152.** Коренів немає. **6.153.** Якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x_{1,2} = \pm a$. **6.154.** $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **6.155.** Якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = 1/a$, $x_2 = -\sqrt[3]{a}$. **6.156.** $x_1 = 3$, $x_2 = 2/3$. **6.157.** $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 2 - a$. **6.158.** $x = 0$. **6.159.** $x = 2$. **6.160.** $x = 12$. **6.161.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. **6.162.** $x_1 = (b + 128)/a$, $x_2 = (128b + 1)/(128a)$. **6.163.** $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **6.164.** $x = 2$. **6.165.** $x_1 = 0$, $x_2 = -5$. **6.166.** $x_1 = 2$, $x_2 = -7$. **6.167.** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. **6.168.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1/3$. **6.169.** $x = 1$. **6.170.** $x = 5$. **6.171.** $x_1 = 8$, $x_{2,3} = 8 \pm 12\sqrt{21}/7$. **6.172.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. **6.173.** $x = 0$. **6.174.** $z = -4/3$. **6.175.** $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 2$. **6.176.** $x = 0$. **6.177.** $x = 1$. **6.178.** $x_1 = (4b - a)/3$, $x_2 = (4a - b)/3$; якщо $a = b$, то коренів немає. **6.179.** $x \in [0;\ 1]$. **6.180.** 10; $-20{,}5$. **6.181.** $x = -(a + 1)$. **6.182.** -1; 2. **6.183.** $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $((-7 + \sqrt{73})/2;\ -(7 + \sqrt{73})/2)$, $(-(7 + \sqrt{73})/2;\ (-7 + \sqrt{73})/2)$. **6.184.** $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. **6.185.** $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$, $(\sqrt{3}/3;\ 5\sqrt{3}/3)$, $(-\sqrt{3}/3;\ -5\sqrt{3}/3)$. **6.186.** $x = \dfrac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$, $y = \dfrac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$, $z = \dfrac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$. **6.187.** $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$. **6.188.** $x = abc$, $y = ab + bc + ca$, $z = a + b + c$. **6.189.** $(2;\ 1)$, $(-1;\ -2)$. **6.190.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{abc}/b$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{abc}/c$, $z_{1,2} = \pm\sqrt{abc}/a$. **6.191.** $(2;\ 2)$, $(-3;\ -3)$, $((1 + \sqrt{21})/2;\ (1 - \sqrt{21})/2)$, $((1 - \sqrt{21})/2;\ (1 + \sqrt{21})/2)$. **6.192.** $(3;\ 1)$, $(3;\ -1)$, $(-5/3;\ \sqrt{65}/3)$, $(-5/3;\ -\sqrt{65}/3)$. **6.193.** $(1;\ 1;\ 1)$, $(-2;\ -2;\ -2)$. **6.194.** $(5;\ 3)$, $(-5;\ -3)$. **6.195.** $(1;\ 2)$, $(-239/146;\ 117/146)$. **6.196.** $(3;\ 5)$, $(5;\ 3)$. **6.197.** $(2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$. **6.198.** Якщо $ab + 1 = 0$, то $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$, x — будь-яке число; якщо $ab = 1 \neq 0$, то $x_1 = (a + b)/2$; $y_1 = (a - b)/2$, $x_2 = (a + b)/(2ab)$, $y_2 = (a - b)/(2ab)$. **6.199.** $(3;\ 0;\ 5)$. **6.200.** $(3;\ 2)$, $(1;\ 4)$, $(-3;\ -4)$, $(-5;\ -2)$. **6.201.** $(2;\ -3)$. **6.202.** $(1;\ 1;\ 1)$. **6.203.** $(0;\ 0;\ 0)$, $(a - b;\ b - c;\ c - a)$. **6.204.** $(2;\ 1)$, $(6;\ -3)$, $(6 + 2\sqrt{3};\ -2 - 2\sqrt{3})$, $(6 - 2\sqrt{3};\ -2 + 2\sqrt{3})$. **6.205.** $(3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$, $(14\sqrt{106}/53;\ 4\sqrt{106}/53)$, $(-14\sqrt{106}/53;\ -4\sqrt{106}/53)$. **6.206.** $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$. **6.207.** $(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ 4;\ 1)$, $(5;\ 2;\ -1)$, $(5;\ 4;\ -3)$. **6.208.** $(a;\ 2a)$, $(2a;\ a)$. **6.209.** $(3;\ -2)$, $(-2;\ 3)$. **6.210.** $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$, $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(-2;\ -1)$, $(-1;\ -2)$. **6.211.** $(2;\ 3)$, $(-2;\ -3)$. **6.212.** $(1;\ 3;\ 5)$, $(-1;\ -3;\ -5)$. **6.213.** $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$. **6.214.** $(0;\ 0;\ 0)$, $(2;\ -1;\ -1)$. **6.215.** $(2;\ -5)$. **6.216.** $(4;\ 4)$, $(-5;\ -5)$, $((1 + \sqrt{77})/2;\ (1 - \sqrt{77})/2)$, $((1 - \sqrt{77})/2;\ (1 + \sqrt{77})/2)$. **6.217.** $(1;\ 3)$, $(3;\ 1)$, $(-1;\ -3)$, $(-3;\ -1)$. **6.218.** $(a;\ 2a)$, $(2a;\ a)$. **6.219.** $(1;\ 1;\ 1)$, $(7;\ -3;\ -1)$. **6.220.** $(4;\ 2)$, $(-4;\ -2)$. **6.221.** $(3;\ -2;\ 1)$, $(-1;\ 0;\ 3)$. **6.222.** $(11;\ 1)$. **6.223.** $(2;\ -2)$. **6.224.** $(3;\ -2;\ 6)$. **6.225.** $(16;\ 1)$, $(1;\ 16)$. **6.226.** $(1;\ 1)$. **6.227.** $(-4;\ 5;\ 3)$. **6.228.** $(4;\ 9)$, $(9;\ 4)$. **6.229.** $(49;\ 49)$. **6.230.** $(2;\ 3)$, $(13/3;\ -5/3)$. **6.231.** $(5;\ 4)$, $(-9;\ 25)$. **6.232.** $(5;\ 4)$. **6.233.** $(2;\ -1)$. **6.234.** $(64;\ 1)$, $(1;\ 64)$. **6.235.** $(1;\ 7)$, $(49/64;\ 41/8)$, $(7;\ -8)$. **6.236.** $(\sqrt{10};\ \sqrt{6})$, $(\sqrt{10};\ -\sqrt{6})$. **6.237.** $(4;\ 1)$, $(121/64;\ 169/64)$. **6.238.** $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$. **6.239.** $(3/2;\ 2/3)$, $(-1;\ -1)$, $(1;\ 1)$, $(-3/2;\ -2/3)$. **6.240.** $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$, $(-4;\ -1)$, $(-1;\ -4)$. **6.241.** $(5;\ 4)$, $(-\sqrt{28{,}5};\ -\sqrt{12{,}5})$, $(-\sqrt{28{,}5};\ \sqrt{12{,}5})$. **6.242.** $(3;\ 3/2)$, $(6;\ 3)$. **6.243.** $(10;\ 1)$, $(-21/2;\ 53/12)$. **6.244.** $x_1 = 0$; $x_2 = -10$. **6.245.** $(0;\ 0)$, $(1;\ -1)$, $(1/2;\ 0)$.

6.246. $ax^2+bx+(c+\sqrt{b^2-4ac}-a)=0$. **6.247.** $m=3$ і $m=-2$; при цих значеннях m буде $z_1=-1$, $z_2=-3$, $z_3=4$. **6.250.** $a=-2$. **6.251.** $p>2$; $x_1=p+2$, $x_2=(2-p)/5$. **6.252.** $p=1$, $q=-6$ і $p=-1$, $q=-6$. **6.253.** $x^2+(4q-2p^2)x+(p^4-4p^2q)=0$. **6.254.** $21x^2-23x+6=0$. **6.256.** $x_1=-3$, $x_2=-5$. **6.257.** $u_1=1$, $u_2=a+b$, $u_3=a-b$. **6.258.** $x_1=1$, $x_2=a$, $x_3=1-a$. **6.259.** $x_1=-1$, $x_2=a$, $x_3=2a$. **6.260.** $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-2$. **6.261.** $x_1=1$, $x_2=a+\sqrt{a}$, $x_3=a-\sqrt{a}$. **6.262.** $x=1$. **6.263.** $x_1=4$, $x_2=2$. **6.264.** $x_1=-1$, $x_2=2$. **6.265.** $x_1=1$, $x_{2,3}=a\pm\sqrt{m}$. **6.266.** $x_1=a$, $x_{2,3}=a\pm\sqrt{b}$. **6.267.** $x_1=-3$, $x_2=p+1$, $x_3=-p+2$. **6.268.** $z_1=1$, $z_{2,3}=p\pm\sqrt{q}$. **6.269.** $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=x_3=a-\sqrt{3}$. **6.270.** $x=-1/2$. **6.271.** $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-1/2$. **6.272.** $x_1=x_2=2/3$, $x_3=5/3$. **6.273.** $x_{1,2}=\pm 1/2$, $x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$. **6.274.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$. **6.275.** $x=0$. **6.276.** $x_1=1$, $x_2=4$. **6.277.** $x=1$. **6.278.** $x=3$. **6.279.** $x=8$. **6.280.** $x=0$. **6.281.** $x_1=-6$, $x_2=-5{,}5$ і $x_3=5$. **6.282.** $u=2$. **6.283.** $x=32$. **6.284.** $x_1=63/5$, $x_2=-17{,}5$. **6.285.** $x_1=0$, $x_2=1$. **6.286.** $x=1$. **6.287.** $x=64$. **6.288.** $x=5$. **6.289.** $x_1=1$, $x_2=2\sqrt[3]{4}$, $x_3=-3\sqrt[3]{9}$. **6.290.** $x=5$. **6.291.** $x=4$. **6.292.** $x_1=-1$, $x_2=1$. **6.293.** $x=1$. **6.294.** $x_1=1$, $x_2=-6$. **6.295.** $x_1=1$, $x_2=-1$. **6.296.** $x_1=7$, $x_2=26$. **6.297.** $x=31$. **6.298.** $x_1=7$, $x_2=14$, $x_{3,4}=21/2\pm 7\sqrt{141}/12$. **6.299.** $x=79$. **6.300.** $x=3$. **6.301.** $x_1=190/63$, $x_2=2185/728$. **6.302.** $x=2$. **6.303.** $(3;\ -1)$, $(1;\ -3)$. **6.304.** $(a;\ b;\ c)$. **6.305.** $x=2$, $u=1$, $v=2$, $w=3$. **6.306.** $(0;\ 0;\ 0)$, $(-1;\ 1;\ 1)$. **6.307.** $(1;\ 1;\ 1)$. **6.308.** $(1;\ 2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ -3)$. **6.309.** $(1;\ -1;\ 2)$, $(1;\ 2;\ -1)$, $(-1;\ 1;\ 2)$, $(-1;\ 2;\ 1)$, $(2;\ 1;\ -1)$, $(2;\ -1;\ 1)$. **6.310.** $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(-2;\ -1)$, $(\sqrt{5}/5;\ \sqrt{5}/10)$, $(\sqrt{5}/10;\ \sqrt{5}/5)$, $(-\sqrt{5}/5;\ -\sqrt{5}/10)$, $(-\sqrt{5}/10;\ -\sqrt{5}/5)$. **6.311.** $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$. **6.312.** $(1;\ -2;\ 3)$, $(1;\ -3;\ 2)$, $(2;\ -1;\ 3)$, $(2;\ -3;\ 1)$, $(3;\ -1;\ 2)$, $(3;\ -2;\ 1)$. **6.313.** $(2;\ 1)$, $(19\sqrt[3]{4}/4;\ -17\sqrt[3]{4}/4)$. **6.314.** $(2;\ 2;\ 2)$. **6.315.** $(1;\ 1)$. **6.316.** $(a+1;\ a;\ a-1)$, $(-a-1;\ -a;\ -a+1)$. **6.317.** $(3;\ -2;\ 2)$, $((9+3\sqrt{5})/2;\ -(7+3\sqrt{5})/2;\ (1-3\sqrt{5})/2)$, $((9-3\sqrt{5})/2;\ (-7+3\sqrt{5})/2;\ (1+3\sqrt{5})/2)$. **6.318.** $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(-1;\ -3)$, $(-3;\ -1)$. **6.319.** $(-2;\ 3)$, $(3;\ -2)$. **6.320.** $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$. **6.321.** $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. **6.322.** $(2;\ 1)$. **6.323.** $(1;\ 2)$. **6.324.** $(6;\ 9)$, $(9;\ 6)$. **6.325.** $(4;\ 4;\ -4)$. **6.326.** $(0;\ 0)$, $(-1;\ -2)$, $(-2;\ -1)$, $(2/3;\ -1/3)$, $(-1/3;\ 2/3)$. **6.327.** Коренів немає. **6.328.** $(0;\ 0)$, $(2;\ 4)$, $(4;\ 2)$. **6.329.** $(1;\ 64)$, $(64;\ 1)$. **6.330.** Якщо $a\neq b$, то $x_1=1/3$, $y_1=1/3$, $x_2=-4/3$, $y_2=-4/3$; якщо $a=b\neq 0$, то система має безліч розв'язків, які є координатами точок двох прямих $x-4y=-1$ і $4x-y=-4$. **6.331.** $(17/12;\ 5/3)$. **6.332.** $(1;\ 1;\ 1)$. **6.333.** $(2;\ 3)$, $(-2;\ -3)$, $(2;\ -3)$, $(-2;\ 3)$. **6.334.** $(0;\ 0)$. **6.335.** $(26;\ 10)$, $(650;\ -646)$. **6.336.** $(25/3;\ 16/3)$. **6.337.** $(5;\ 4;\ 5)$. **6.338.** $(4;\ 4)$, $(4{,}5;\ 3{,}5)$. **6.339.** $(\sqrt{2}/4;\ -\sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4;\ \sqrt{2}/4)$. **6.340.** $(5;\ 3)$, $(5;\ 4)$. **6.341.** $(8\sqrt{26}/13;\ 27\sqrt{26}/13)$, $(-8\sqrt{26}/13;\ -27\sqrt{26}/13)$, $(-8\sqrt{26}/13;\ 27\sqrt{26}/13)$, $(8\sqrt{26}/13;\ -27\sqrt{26}/13)$. **6.342.** $S_{n+2}=-(bS_{n+1}+cS_n)/a$. **6.343.** 1) $x^3-qx^2+prx-r^2=0$; 2) $x=\sqrt{2}$. **6.344.** $a=-52$, $b=-40$. **6.345.** $p=-60$, $q=36$. **6.346.** ab. **6.348.** $x_1=2/3$, $x_2=-3/2$, $x_3=1/2$. **6.349.** $x=1/2$. **6.350.** $x^3-(p^2-q)x^2+(p^2q-q^2)x-q^3=0$. **6.351.** $x_1=10$, $x_{2,3}=$

$= -2 \pm \sqrt{3}$ і $x = 5$. **6.352.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm 4$ і $x = -2$. **6.353.** $x = 1 + \lambda^{-1}$, де λ — дійсне число; $\lambda \neq 0$. **6.354.** $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = -5/2$. **6.355.** $n = 17$. **6.356.** $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$. **6.357.** $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}/3$, $x_3 = -2\sqrt{3}$. **6.358.** $x = 5$ і $x_1 = 10$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. **6.359.** $x_1 = -b/a$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-d/b}$ за умови, що $bd < 0$. **6.361.** $x = -q$. **6.363.** 1/8; —1/4; 1/2. **6.364.** $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 0{,}5 + \sqrt{3}$, $x_3 = 0{,}5 - \sqrt{3}$. **6.365.** $x = 1$. **6.366.** $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. **6.368.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. **6.369.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 1/2$. **6.370.** $x = 2$.

Глава 7

7.001. 10. **7.002.** 890. **7.003.** 3. **7.004.** 2. **7.005.** —11. **7.006.** 24. **7.007.** 19. **7.008.** 1. **7.009.** 8. **7.010.** $a^2 + a + 1$. **7.011.** $\log_a \sqrt{a^2 - 1}$. **7.012.** $ab\,(a - b)^2$. **7.013.** $1 + a$. **7.014.** $\log_a b$ **7.015.** $\log_a b$. **7.016.** $1/b$. **7.018.** 5. **7.019.** $z \geqslant 2$. **7.020.** 1/2. **7.021.** 2. **7.022.** 3; 81. **7.023.** —5/4. **7.024.** 1,5; 10. **7.025.** — 2. **7.026.** 13. **7.027.** 1/2. **7.028.** 0. **7.029.** 5. **7.030.** —1; 5. **7.031.** 3. **7.032.** 1. **7.033.** 0,01; 0,1; 10; 100. **7.034.** 3. **7.035.** 1. **7.036.** —3; 3. **7.037.** —1; 1. **7.038.** 5; 15. **7.039.** 7. **7.040.** —3; 3. **7.041.** 2; 11. **7.042.** 1. **7.043.** 2; 6. **7.044.** 1/9; 3. **7.045.** 37. **7.046.** $4 - \sqrt{11}$. **7.047.** 3. **7.048.** 54. **7.049.** 2; 3. **7.050.** 6. **7.051.** 29. **7.052.** 1/128; 2. **7.053.** 10. **7.054.** 64. **7.055.** 2. **7.056.** 100. **7.057.** — 3. **7.058.** 5,5. **7.059.** 81. **7.060.** — 0,2; 3. **7.061.** 25. **7.062.** 5/3. **7.063.** 1; 2. **7.064.** —2,5; 3. **7.065.** 9/4. **7.066.** 4. **7.067.** — 7; 8. **7.068.** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **7.069.** 2. **7.070.** 1; 3. **7.071.** 0. **7.072.** — 1/2; 1/2. **7.073.** $-\sqrt{2}$; —1; 1; $\sqrt{2}$. **7.074.** 3. **7.075.** 20. **7.076.** 9. **7.077.** —1; 9. **7.078.** $3\log_6 2$; 3. **7.079.** 1/27; 9. **7.080.** 10. **7.081.** 5; 25. **7.082.** 10^{-5}; 10^3. **7.083.** 2; 64. **7.084.** 3. **7.085.** —1; 1. **7.086.** $1/\sqrt{10}$; 100. **7.087.** —3; 1. **7.088.** $\sqrt[3]{2}$. **7.089.** 0; 2. **7.090.** 1; 100. **7.091.** 1. **7.092.** 3; $3 + \sqrt{2}$. **7.093.** 1/9; 9. **7.094.** 5. **7.095.** $\sqrt[9]{a}$; a^9, де $a > 0$, $a \neq 1$. **7.096.** —1; 7. **7.097.** 0; 6. **7.098.** 5. **7.099.** 0. **7.100.** 1; 2. **7.101.** 10. **7.102.** $5 - \sqrt{11}$. **7.103.** 10. **7.104.** 5. **7.105.** 5. **7.106.** $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$. **7.107.** $\sqrt[3]{2}$; 4. **7.108.** 17/4; 33/8; 8; 12. **7.109.** 1. **7.110.** 0. **7.111.** 9. **7.112.** 10. **7.113.** 0,1; 1000. **7.114.** —10. **7.115.** $10^{-9/2}$; 10. **7.116.** 2; 8. **7.117.** 9. **7.118.** 7. **7.119.** 2. **7.120.** 3; 10. **7.121.** 2. **7.122.** 0; 25. **7.123.** 7; 8. **7.124.** 2; 4. **7.125.** 3; 27^3. **7.126.** $\sqrt{3}$. **7.127.** —2. **7.128.** (5; 5). **7.129.** (4,5; 0,5). **7.130.** (4; 2), (4; —2). **7.131.** (2; 18), (18; 2). **7.132.** (1; 2), (16; —28). **7.133.** (9; 3), (3; 9). **7.134.** (3; 2). **7.135.** (6; 8), (8; 6). **7.136.** (25; 36). **7.137.** (4; 2). **7.138.** (5; 1), (5; —1). **7.139.** (3; —3). **7.140.** (1/2; —3/2). **7.141.** (4; 2). **7.142.** (4; 16). **7.143.** (3; 3), (5; 1). **7.144.** (1; 1). **7.145.** (16; 3), (1/64; —2). **7.146.** (3; 27). **7.147.** $((\sqrt{5} - 1)/2;\ (3 - \sqrt{5})/2)$. **7.148.** (9; 16). **7.149.** (5; 1). **7.150.** $a + b$. **7.151.** 0, якщо $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} a > 1, \\ b > 1, \end{cases}$ і $-2\,(\log_b a + \log_a b)$, якщо $\begin{cases} a > 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ b > 1. \end{cases}$ **7.152.** $(\log_2 x + 1)^3$. **7.153.** $x + 1$, де $x > 0$, $x \neq 1$. **7.154.** $\log_a b$. **7.155.** $3 - 2\log_a b$, якщо $0 < b < a^3$, і —3, якщо $b \geqslant a^3$. **7.156.** $1/(\log_a b - 1)$.

7.157. $(1/(\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1})$. 7.158. $\alpha=10^{1/(1-\lg\gamma)}$. 7.160. 0. 7.161. $3(1-a)/(b+1)$. 7.163. $a(b+3)$. 7.165. $-1/2$. 7.166. 25. 7.167. 1/25. 7.168. 1/12. 7.169. $\pi n/2$, $n\in Z$. 7.170. 0; 16/9. 7.171. 1; 1/16. 7.172. -64; -1. 7.173. -100. 7.174. 1/9; 9. 7.175. -1; 3. 7.176. 5. 7.177. 0. 7.178. $1/\sqrt[3]{3}$. 7.179. 2. 7.180. 1/10; $10^{(1\pm\sqrt{3})/2}$. 7.181. 1/3; 9. 7.182. a, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.183. 0,75. 7.184. a^6, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.185. $\sqrt[5]{7}$; 7. 7.186. 3. 7.187. 2. 7.188. 1/25; $1/\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; 25. 7.189. m, де $m>0$, $m\neq 1$. 7.190. 16/3. 7.191. $\sqrt[10]{10}$. 7.192. 1/8; 8. 7.193. $\sqrt{3}$. 7.194. $1/\sqrt[3]{4}$; 8. 7.195. 1/625; 5. 7.196. $\sqrt{3}$. 7.197. 9. 7.198. 25. 7.199. -5; 5. 7.200. 6. 7.201. 17. 7.202. $\sqrt{3}$; 3. 7.203. $1/(4\sqrt[5]{8})$; 1; 4. 7.204. 2; 3; 4; 11. 7.205. 1/3; 2; 4. 7.206. $-1/5$; 1/2; 1; 3. 7.207. a, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.208. 4. 7.209. 3. 7.210. 1; 3. 7.211. 1/3. 7.212. 4. 7.213. 1/9; 9. 7.214. 0. 7.215. 2,5. 7.216. 0; 1; 2. 7.217. -2; 2. 7.218. 2. 7.219. 1. 7.220. -2. 7.221. 0,01. 7.222. 0; 1/2. 7.223. 1/3. 7.224. 1; $\log_2(3+\sqrt{29})-1$. 7.225. 2. 7.226. 1/3; 3. 7.227. 5. 7.228. 100. 7.229. 0. 7.230. 1. 7.231. 16. 7.232. $0{,}5\sqrt[3]{4}$; 4. 7.233. $1/a$; $\sqrt{a}$; a^2. 7.234. 0,1; $\sqrt{10}$; 100. 7.235. 1. 7.236. -1000. 7.237. $-1/2$. 7.238. $-2\sqrt[3]{2}$. 7.239. 256. 7.240. 1,1; 11. 7.241. 1. 7.242. 0. 7.243. 3. 7.244. $(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in Z$. 7.245. 3. 7.246. 2. 7.247. 5. 7.248. 8; 9. 7.249. $2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$, де $3<a<27$. 7.250. a^6, де $a>0$, $a\neq 1$. 7.251. 0,001; 1; 10. 7.252. 1. 7.253. $x=4-a^2$ при $0<a<1$ і $1<a<2\sqrt{2}$. 7.254. 0. 7.255. 4. 7.256. $4\log_3 2$. 7.257. 1023. 7.258. $(2a-1)/(a+3)$ при $a\neq-2$, $a\neq-3$ і $a\neq 1/2$; коренів немає при $a=-2$, $a=-3$ і $a=1/2$. 7.259. (1; 1), $(\sqrt[3]{6}/3;\ 2\sqrt[3]{6}/3)$. 7.260. (2; 2). 7.261. (2; 4). 7.262. (6; 2). 7.263 (2; 1). 7.264. (10; 1,5), (0,2; 75), (15; 1). 7.265. (2; 4). 7.266. $(\sqrt{3};\ 1)$, $(-\sqrt{3};\ 1)$. 7.267. (27; 4) (1/81; -3). 7.268. (1; 9), (16; 1). 7.269. (-2; 7). 7.270. (8; 4). 7.271. (5; 2). 7.272. (16; 20). 7.273. (1; 0), (2; 1). 7.274. ($9a$; $2a$), (a; $18a$), де $a>0$, $a\neq 1$. 7.275. (4; 1). 7.276. (4; 1), (-4; -1). 7.277. $(\sqrt{2};\ 2)$, $(\sqrt[3]{4}/2;\ -3)$. 7.278. (6; 6). 7.279. (3; 5), (6; 2), (1; 7). 7.280. (2; 4), $(4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2})$. 7.281. (3; 9). 7.282. (6; 2). 7.283. (5; 5). 7.284. (3; 9), (9; 3). 7.285. (5; 3) (1; -1). 7.286. (-10; 20), (10/3; 20/3). 7.287. (1; 4). 7.288. (8; 9), $(27\log_5^3 2;\ 4\log_2^2 5)$. 7.289. (4; 2), ($-4$; 2). 7.290. (1/2; 4). 7.291. (2; 3). 7.292. (1; 3). 7.293. (2/9; 1/9). 7.294. (6; 2). 7.295. $\lg b$, де $b>1$. 7.296. 2, якщо $1<a\leqslant b$, і $2\log_a b$, якщо $1<b<a$. 7.297. $\log_n^2 p$, де $\begin{cases}n>1,\\p>1\end{cases}$ або $\begin{cases}0<n<1,\\0<p<1.\end{cases}$ 7.298. -2, якщо $1<a\leqslant b$, і $-2\log_a b$, якщо $1<b<a$. 7.299. $1-\log_a(a-b)$, якщо $\begin{cases}0<a<1,\\b<0\end{cases}$ або $\begin{cases}a>1,\\0<b<a,\end{cases}$ і $\log_a(a-b)-1$, якщо $0<b<a<1$ або $\begin{cases}a>1,\\b<0.\end{cases}$ 7.300. $\log_{135}675>\log_{45}75$. 7.301. $x=\log_{0,4}((\sqrt{5}-1)/2)$, $0<x<1$. 7.303. $\log_n A\log_m A\log_p A\log_A(mnp)$. 7.305. $\log_a b-\log_b a$. 7.306. При $p=1$ і при $p\in[-1/2;\ -3/22]$. 7.307. При $a=12$ і при $a\in(-\infty;\ 0)$. 7.308. 3. 7.309. 1; 4. 7.310. 3. 7.311.

1/8; 1/2. **7.312.** 64. **7.313.** 3. **7.314.** 7. **7.315.** $\pi/2+\pi n$, де $n\in Z$. **7.316.** $1-\sqrt{1-0{,}5\lg p}$; $1+\sqrt{1-0{,}5\lg p}$, де $1<p\leqslant 100$. **7.317.** 4. **7.318.** $\sqrt[k]{k}$, де $k\geqslant 2$. **7.319.** b^2+1, де $b>0$, $b\neq 1$. **7.320.** 1/3; 3. **7.321.** 0,1; 2; 1000. **7.322.** 2 і (0; 6), якщо $a=1$. **7.323.** 2 і $(-2;\ \infty)$, якщо $p=1$. **7.324.** -1; 1; 2. **7.325.** 1; 3. **7.326.** -1; 2; 4. **7.327.** 4. **7.328.** 100. **7.329.** 1; 17/12; 11/6. **7.330.** $1-\sqrt{2}$; 1; $1+\sqrt{2}$. **7.331** 1/3; 9. **7.332.** $(\sqrt{5}-3)/2$; $(9-\sqrt{29})/2$. **7.333.** 16. **7.334.** (3/2; 1/2). **7.335.** $\left(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}},\ a^{\frac{q}{q-p}}\right)$. **7.336.** (1/4; 1/3). **7.337.** $(-a^3;\ -1/a)$, $(-1/a;\ -a^3)$. **7.338.** (8; 2), (1/2; 1/8). **7.339.** (0; 0), (8; -8), (3; 1/3), (-4; -2). **7.340.** (3; 9), (1/9; 1/3).

Глава 8

(Всюди, якщо немає інших вказівок, припускаємо, що k, l, m набувають будь-яких цілих значень)

8.001. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k+1)$. **8.002.** $x=(-1)^{k-1}\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.003.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.004.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.005.** $z=(-1)^k\,10^\circ+60^\circ\cdot k$. **8.006.** $t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.007.** $t_1=\pi k$, $t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.008.** $t_1=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $t_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{3}$. **8.009.** $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.010.** $z=\pm 40^\circ+120^\circ\times k$. **8.011.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.012.** $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.013.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.014.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.015.** $z_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.016.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.017.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(8k\pm 3)$. **8.018.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.019.** $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$. **8.020.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.021.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.022.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$. **8.023.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{5}$, $x_3=\frac{\pi}{11}(2k+1)$. **8.024.** $x=\frac{\pi k}{3}$. **8.025.** $x=15^\circ+360^\circ\cdot k$. **8.026.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}\times(4k+1)$. **8.027.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi k}{7}$. **8.028.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.029.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.030.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.031.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$. **8.032.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$x_2=\frac{2\pi k}{11}$. **8.033.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.034.** $x=\frac{\pi k}{8}$. **8.035.** $x=\frac{\pi}{4}\times(2k+1)$. **8.036.** $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.037.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.038.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.039.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arcctg}5+\pi k$. **8.040.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$. **8.041.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.042.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.043.** $z_1=35^\circ+120^\circ\cdot k$, $z_2=55^\circ+120^\circ\cdot k$. **8.044.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7}$. **8.045.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.046.** $z_1=\pi k$, $z_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **8.047.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$. **8.048.** $x=\frac{\pi k}{4}$. **8.049.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.050.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.051.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.052.** $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.053.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.054.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+3)$. **8.055.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.056.** $t_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{3}(2k+1)$. **8.057.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.058.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{20}(4k+3)$. **8.059.** $x_1=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{3}$. **8.060.** $x=\frac{\pi k}{5}$. **8.061.** $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.062.** $x=\pi(2k+1)$. **8.063.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$. **8.064.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.065.** $z_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{20}(8k+3)$. **8.066.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.067.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. **8.068.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.069.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.070.** $z_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$, $z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2\pi k}{5}$. **8.071.** $z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{2\pi k}{3}$, $z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.072.** $x=\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k$. **8.073.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.074.** $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi k$. **8.075.** $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.076.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.077.** $z_1=2\operatorname{arcctg}3+2\pi k$, $z_2=-2\operatorname{arctg}7+2\pi k$. **8.078.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.079.** $x=$

$= \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.080.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **8.081.** $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi k$. **8.082.** $x_1 = \frac{\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3 = \frac{\pi}{10}(4k+1)$. **8.083.** $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$. **8.084.** $x_1 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **8.085.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$. **8.086.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. **8.087.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$. **8.088.** $t = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.089.** $t_1 = -31° + 180° \cdot k$, $t_2 = 89° + 180° \cdot k$. **8.090.** $t = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.091.** $t_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2 = \pi k$. **8.092.** $x_1 = 100° + 360° \cdot k$, $x_2 = -20° + 360° \cdot k$. **8.093.** $t_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1)$, $t_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **8.094.** $x = \pi(4k+1)$. **8.095.** $x = \frac{\pi k}{6}$. **8.096.** $x_1 = \frac{\pi k}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **8.097.** $z_1 = 2\pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.098.** $z_1 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$, $z_2 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.099.** $x = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.100.** $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.101.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(8k \pm 3)$. **8.102.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.103.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.104.** $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.105.** $x = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.106.** $x = \pm 40° + 120° \cdot k$. **8.107.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k$. **8.108.** $z = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.109.** $x = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.110.** $x = \frac{\pi k}{10}$. **8.111.** $x_1 = 75° + 180° \cdot k$, $x_2 = 45° \cdot k - 3°45'$. **8.112.** $x_1 = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.113.** $x_1 = \frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.114.** $x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.115.** $z = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.116.** $x_1 = 135° + 360° \times k$, $x_2 = -105° + 360° \cdot k$. **8.117.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.118.** $t_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.119.** $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.120.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{5}(2k+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.121.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.122.** $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi k}{5}$.

8.123. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **8.124.** $x=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.125.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k-1)$. **8.126.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.127.** $x=\frac{\pi}{12}(1+6k)$. **8.128.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.129.** $x=\frac{\pi k}{4}$. **8.130.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}$. **8.131.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$. **8.132.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.133.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi k}{9}$. **8.134.** $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.135.** $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.136.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\operatorname{arctg}4+\pi k$. **8.137.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.138.** $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm 1)$. **8.139.** $x_1=\frac{3\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\pi(3k\pm 1)$. **8.140.** $x=45^\circ(4k+1)$. **8.141.** $x_1=\frac{\pi k}{2}-1$, $x_2=\frac{\pi}{10}(2k+1)-1$. **8.142.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)-\frac{1}{2}$, $x_2=(-1)^k\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{12}-\frac{1}{2}$. **8.143.** $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.144.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. **8.145.** $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.146.** $x=60^\circ+180^\circ\cdot k$. **8.147.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.148.** $x=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. **8.149.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.150.** $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.151.** $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(4k+1)$. **8.152.** $x=\frac{\pi}{9}(3k\pm 1)$. **8.153.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.154.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **8.155.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.156.** $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k-2)$. **8.157.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.158.** $x=30^\circ+180^\circ\cdot k$. **8.159.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}\times(4k+1)$. **8.160.** $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi k$. **8.161.** $x_1=\pi k-\operatorname{arctg}3$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.162.** $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.163.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.164.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. **8.165.** $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. **8.166.** $x=\pm\arccos 0{,}8+2\pi k$. **8.167.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.168.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.169.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.170.** $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=$

$=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.171. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.172. $x=180^\circ\times k-25^\circ$. 8.173. $x_1=2\pi k$, $x_2=2\pi k-\frac{1}{\pi}$. 8.174. $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.175. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2}+\pi k$. 8.176. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.177. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$. 8.178. $x=60^\circ\cdot k-40^\circ$. 8.179. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.180. $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.181. $t=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.182. $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi k}{3}$. 8.183. $t=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi k}{2}$. 8.184. $z_1=\frac{2\pi k}{15}$, $k\neq 15l$, $z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1)$, $k\neq 17l+8$. 8.185. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.186. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.187. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.188. $x=25^\circ+90^\circ\cdot k$. 8.189. $t=2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k$. 8.190. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.191. $t=\frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k\neq 7l+3$. 8.192. $x_1=\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi k$. 8.193. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.194. $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.195. $z=\frac{\pi}{18}(6k\pm 1)$. 8.196. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.197. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.198. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$. 8.199. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.200. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.201. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.202. $x=\frac{\pi k}{12}$. 8.203. $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.204. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.205. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.206. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.207. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.208. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$. 8.209. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.210. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.211. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.212. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k\pm 1)$. 8.213. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.214. $t_1=\pi(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.215. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.216. $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. 8.217. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.218. $x_1=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}\pi k$, $x_2=\pi k$. 8.219. $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.220. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.221. $t_1=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 4l+2$; $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$.

8.222. $x = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.223. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.224. $t = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. 8.225. $t_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2 = \operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $t_3 = \operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$. 8.226. $t = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.227. $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8\pi k}}{2}$, $t_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. 8.228. $z = \frac{\pi k}{3}$. 8.229. $t_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2 = (-1)^k \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + \frac{k\pi}{2}$. 8.230. $x = \frac{\pi k}{14}$, $k \neq 14l$. 8.231. $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. 8.232. $t = \frac{\pi k}{4}$. 8.233. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.234. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.235. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.236. $x = \frac{\pi}{4}(1+4k)$. 8.237. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{24}(2k+1)$. 8.238. $x_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$. 8.239. $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. 8.240. $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$. 8.241. $z = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.242. $x = \frac{\pi}{20}(2k+1)$, $k \neq 5l+2$. 8.243. $z = \frac{\pi}{8}(4k-1)$. 8.244. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.245. $t = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. 8.246. $z = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.247. $t = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.248. $t = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.249. $x = \frac{\pi}{12}(3k+1)$. 8.250. $z = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. 8.251. $t = \frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.252. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.253. $t_1 = \frac{\pi}{4} \times (2k+1)$, $t_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. 8.254. $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2 = \frac{1}{2} \times \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$. 8.255. $x = \pi k - 2$. 8.256. $z = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.257. $z = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.258. $z = \frac{\pi}{8}(8k \pm 1)$. 8.259. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$. 8.260. $z_1 = \frac{\pi}{14}(2k+1)$, $2k+1 \neq 7l$; $z_2 = \frac{\pi}{28}(3+4k)$, $3+4k \neq 7l$. 8.261. $t = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$ 8.262. $z = -20° + 60° \cdot k$. 8.263. $x = 4\pi k$. 8.264. $t = \pi k$. 8.265. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.266. $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.267. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$, $x_3 = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$. 8.268. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k$. 8.269. $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$.

8.270. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. **8.271.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.272.** $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.273.** $z_1=\pi k$, $z_2=\pi k-\operatorname{arctg}3$. **8.274.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.275.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi k}{5}$, $k\neq 5l$. **8.276.** $x_1=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{\sqrt{73}-7}{12}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$. **8.277.** $x=\frac{\pi}{32}(4k+3)$. **8.278.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.279.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.280.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.281.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.282.** $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. **8.283.** $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.284.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.285.** $x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}3+\frac{\pi k}{2}$. **8.286.** $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{16}(2k+1)$. **8.287.** $x=8\pi k$. **8.288.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.289.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.290.** $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.291.** $x=2\pi k$. **8.292.** $t=\pi k$. **8.293.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.294.** $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.295.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.296.** $z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.297.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.298.** $z_1=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\frac{\pi k}{2}$, $z_2=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\frac{\pi k}{2}$. **8.299.** $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{2}$. **8.300.** $x=\pi k$. **8.301.** $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.302.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.303.** $z=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **8.304.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.305.** $t_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.306.** $t_1=360^\circ\cdot k$, $t_2=90^\circ(4k+1)$. **8.307.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4}$. **8.308.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\pi k$, $z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.309.** $t=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ **8.310.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.311.**

$t_1 = \pi k$, $t_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k$. **8.312.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. **8.313.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.314.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.315.** $t = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **8.316.** $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.317.** $t = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.318.** $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.319.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **8.320.** $z = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.321.** $t_1 = 90^\circ \cdot k$, $t_2 = \pm 15^\circ + 90^\circ \cdot k$. **8.322.** $x = \pi k$. **8.323.** $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k$. **8.324.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(6k+1)$, $x_2 = \frac{2}{9}\pi(1+3k)$. **8.325.** $z_1 = \pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.326.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.327.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.328.** $x = 45^\circ(4k+1)$. **8.329.** $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.330.** $x_1 = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi k}{2}$. **8.331.** $x = \frac{\pi}{30}(6k \pm 1)$. **8.332.** $x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$. **8.333.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.334.** $t = \frac{\pi}{2}(1+4k)$. **8.335.** $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - 35^\circ + 180^\circ \cdot k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 2 - 35^\circ + 180^\circ \cdot k$. **8.336.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \neq 3l+1$; $x_3 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi k$. **8.337.** $x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi k$, $x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\pi k$. **8.338.** $t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.339.** $x = 2\pi k$. **8.340.** $z_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.341.** $x_1 = -5^\circ + 60^\circ \cdot k$, $x_2 = 70^\circ + 90^\circ \cdot k$. **8.342.** $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.343.** $t_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $t_2 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.344.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.345.** $t_1 = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k \neq 3l+1$; $t_2 = \frac{\pi}{5}(2k+1)$, $k \neq 5l+2$. **8.346.** $x = 2\pi k$. **8.347.** $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.348.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3 = 2\pi k$. **8.349.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $x_2 = \pm \frac{1}{2} \times \arccos \frac{\sqrt{157}-6}{11} + \pi k$. **8.350.** $x = \frac{7}{12}\pi + \pi k$. **8.351.** $x_1 = \frac{\pi}{6}(6k+1)$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k$, $x_3 = \pi k - \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **8.352.** $x_1 = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(8k \pm 3)$. **8.353.** $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.354.**

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.355.** $x = \pi k$. **8.356.** $x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \neq 3l + 1$; $x_2 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.357.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.358.** $x = (-1)^k \times \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.359.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} 5$. **8.360.** $x_1 = \frac{\pi}{24}(8n+1)$. $x_2 = \frac{\pi}{8}(8k-1)$. **8.361.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.362.** $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. **8.363.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.364.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(12k-1)$, $x_3 = \frac{\pi}{3}(6k-1)$. **8.365.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.366.** $x = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.367.** $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.368.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.369.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.370.** $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.371.** $x = \pi k$ при будь-якому a; $x = \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2}$ при $-1 \leqslant a \leqslant 3$. **8.372.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ при будь-якому m; $x = \pi k \pm \frac{1}{2} \times \arccos \frac{m+1}{2}$ при $-3 \leqslant m \leqslant 1$. **8.373.** $x = \frac{\pi}{4}(4k-1) - \alpha$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$; при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$ розв'язків немає. **8.374.** $x = (-1)^k \arcsin \frac{m}{8} + \frac{\pi}{6}(6k+1)$, $-8 \leqslant m \leqslant 8$. **8.375.** $x = \pi k - \frac{3}{2} + (-1)^k \arcsin \frac{\cos\alpha}{2\cos 1}$ при будь-якому α. **8.376.** $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.377.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.378.** $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.379.** $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **8.380.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}$. **8.381.** $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. **8.382.** $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.383.** $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. **8.384.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$. **8.385.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.386.** $x + y = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.390.** $\arcsin(3/5)$, $\arcsin(5/13)$, $\pi - \arcsin(56/65)$. **8.392.** $\sin\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$. **8.393.** $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. **8.394.** $x_1 = (-1)^k \times \frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_1 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **8.395.** $x = \pi k_1$, $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k_2$. **8.396.** $x = \frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y = \frac{\pi}{6}(6k-1)$. **8.397.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2)$, $y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi(k_1 +$

$+ k_2)$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2)$, $y_2 = \frac{2\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2)$. **8.398.** $x = \frac{1}{6}(6k - 1)$, $y = \frac{1}{6}(6k + 1)$. **8.399.** $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $y_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi k$; $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $y_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi k$. **8.400.** $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} + \pi(k + 2n)$. **8.401.** $x_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi k_1$, $y_1 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k_2$; $x_2 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k_1$, $y_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2\pi k_2$. **8.402.** $x = \frac{\pi}{2}(2k_1 + 1)$, $y = \frac{\pi}{3}(6k_2 \pm 1)$. **8.403.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2)$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k_1 - k_2)$. **8.404.** $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $y_1 = \frac{\pi}{3}(1 - 3k)$; $x_2 = \frac{\pi}{3}(3k + 1)$, $y_2 = \frac{\pi}{2} \times (1 - 2k)$. **8.405.** $x = \frac{\pi}{6}(6k + 1)$, $y = \frac{\pi}{6}(1 - 6k)$. **8.406.** $x = \pi k$, $y = \frac{\pi m}{2}$, $z = \frac{\pi}{6}(4n - 1)$. **8.407.** $x = \pi k$. **8.408.** $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.409.** $t = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$. **8.410.** $t_1 = \frac{\pi}{4}(1 + 8k)$, $t_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi(2k + 1)$. **8.411.** $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.412.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_3 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \pi k$. **8.413.** $z_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $z_2 = \arcsin\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \pi k$. **8.414.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.415.** $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.416.** $x_1 = \pi(2k + 1)$, $x_2 = \arccos(\sqrt{5} - 2) + 2\pi k$. **8.417.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$. **8.418.** $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$. **8.419.** $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$. **8.420.** $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$. **8.421.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 6 + \pi k$. **8.422.** $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. **8.423.** $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$. **8.424.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(8k + 5)$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi(2k + 1)$. **8.425.** $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $x_2 = 2\pi k$. **8.426.** $x_1 = \frac{\pi}{16} \times (4k + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} + \frac{\pi k}{4}$. **8.427.** $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. **8.428.** $x = \frac{\pi}{8}(8k + 3)$. **8.429.** $x_1 = \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi}{2}(2k + 1)$. **8.430.** $t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8k}}{2} + 2k$, $t_2 = \frac{3 + \sqrt{5 + 8k}}{2} + 2k$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ **8.431.** $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$.

8.432. $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$. 8.433. $x = \pi k$. 8.434. $x = \pm \arccos \frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}} + 2\pi k$. 8.435. $x = \frac{\pi k}{6}$. 8.436. $z = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.437. $x = \pi k$, $y = \frac{\pi}{6}(4n+1)$. 8.438. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.439. $x_1 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x_2 = \pm \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$. 8.440. $t_1 = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{4}{2k+1} + \frac{\pi n}{2}$, $n \leqslant -4$, $k \geqslant 3$; $t_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$. 8.441. $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} + \pi k$. 8.442. $x = \frac{\pi}{12}(3k \pm 1)$. 8.443. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} + 2\pi k$. 8.444. $t = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.445. $t = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k$. 8.446. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2 = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\pi k}{2}$. 8.447. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{32}(4k+1)$. 8.448. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y = \pi m$. 8.449. $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.450. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi k$. 8.451. $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$. 8.452. $x_1 = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}-2}{2} + 2\pi k$. 8.453. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.454. $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8\pi k}}{2} + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 8.455. $t = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.456. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.457. $x = \pi(4k+1)$. 8.458. $t = \frac{\pi}{4}(4k-1) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$. 8.459. $x = -1 \pm \sqrt{1+\pi k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 8.460. $x = \pi k$. 8.461. $x = 2\pi k$. 8.462. $x_1 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$. 8.463. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y = \frac{\pi}{2}(4l+1)$, $z = \frac{\pi n}{3}$. 8.464. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.465. $x = \pi(2k+1)$. 8.466. $x = \frac{2\pi k}{5}$, $k \neq 5l$. 8.467. $x_1 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.468. $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{1+8k}}{4}$, $k > 0$, $k \neq l(2l+1)$; $t_3 = \frac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$,

$k \neq l(2l-1)$, $l > 0$. 8.469. $x = \pi(2k+1)$. 8.470. $t = \pm 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi k$. 8.471. $x = \frac{5\pi}{6}(4k+1)$, $k \neq 3l+2$. 8.472. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\mathrm{arctg}\,\frac{1}{6} + \pi k$. 8.473. $x = \frac{\pi}{2}(1+4k)$. 8.474. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi k$. 8.475. $t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2k}}{2}$, $k \geqslant -1$, $k \neq 2(l^2-1)$. 8.476. $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. 8.477. $t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. 8.478. $t = \frac{\pi}{12}(3k \pm 1)$. 8.479. $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $y = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. 8.480. $z_1 = 2\pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.481. $t = \frac{\pi}{12}(6k+5)$. 8.482. $t_1 = \pi k$, $t_2 = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.483. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.484. $z = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi k$. 8.485. $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.486. $t_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2 = \frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.487. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.488. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.489. $x = \frac{\pi}{6}(6k+1)$. 8.490. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.491. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.492. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.494. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y = \frac{\pi}{4}(2k+5) + 2\pi k$. 8.495. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k_1+1)$, $y_1 = \pi k_2$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $y_2 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k_1$. 8.496. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k$, $y_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n$; $x_3 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k$, $y_3 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n$. 8.497. $x = \pm\frac{\pi}{8}$, $y = \mp\frac{\pi}{8}$. 8.498. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_1$, $y = \frac{\pi}{4} + \pi(2k_2+1)$. 8.499. $x_1 = (-1)^{k_1}\frac{\pi}{6} + \pi k_1$, $y_1 = (-1)^{k_2}\frac{\pi}{6} + \pi k_2$, $z_1 = (-1)^{k_3}\frac{\pi}{6} + \pi k_3$, k_1, k_2, k_3 — числа однакової парності; $x_2 = y_3 = z_4 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k_1$, $y_2 = z_3 = x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_2+1)$, $z_2 = x_3 = y_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_3$; $x_5 = y_6 = z_7 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k_1+1)$, $y_5 = z_6 = x_7 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_2$, $z_5 = x_6 = y_7 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_3+1)$. 8.500. $x_1 = \pi/6$, $y_1 = \pi/3$, $z_1 = \pi/2$; $x_2 = y_3 = z_4 = 0$, $y_2 = z_3 = x_4 = 0$, $z_2 = x_3 = y_4 = \pi$.

9.008. $(-4; -3)$. **9.010.** 2. **9.011.** 1. **9.012.** 2. **9.013.** $(-1; 2]$. **9.014.** 2; 3. **9.015.** $(-2; 0)$. **9.016.** $(-\infty; -1) \cup [4; \infty)$. **9.017.** $[-2; 1) \cup (1; 2]$. **9.018.** $(1; \infty)$. **9.019.** $[2; \infty)$. **9.020.** $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **9.021.** $[2; 4)$. **9.022.** $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. **9.023.** $(-\infty; -2) \cup (5/8; \infty)$. **9.024.** $(5/3; \infty)$. **9.025.** $(3; 4{,}5)$. **9.026.** $(8/3; \infty)$. **9.027.** $(-1; 2) \cup (2; 3)$. **9.028.** $[0; 3]$. **9.029.** $(-\infty; 1) \cup (4/3; 2)$. **9.030.** $(-4{,}5; -2) \cup (3; \infty)$. **9.031.** $(-\infty; 1/3) \cup (3; 5) \cup (5; \infty)$. **9.032.** $(-\infty; -1/2] \cup [5; \infty)$. **9.033.** $(-1; 2) \cup (3; 6)$. **9.034.** $[0; 8]$. **9.035.** $(-\infty; -0{,}5] \cup [0{,}5; \infty)$. **9.036.** $(-\infty; 2) \cup (8; \infty)$. **9.037.** $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. **9.038.** $(-\infty; 7/3) \cup (3; \infty)$. **9.039.** $(0; 4)$. **9.040.** $(-\infty; 0{,}75) \cup (4; 7)$. **9.041.** $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$. **9.042.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **9.043.** $[4; \infty)$. **9.044.** $(-3; 1)$. **9.045.** $[20/9; 4) \cup (5; \infty)$. **9.046.** $(1; 6)$. **9.047.** $(-1; 5)$. **9.048.** $(1; 3) \cup (3; 5)$. **9.049.** $(0; 3) \cup (7; \infty)$. **9.050.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 0]$. **9.051.** $(0; 2]$. **9.052.** $(0; 0{,}5)$. **9.053.** $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **9.054.** $(0; \infty)$. **9.055.** $(-\infty; 1 - \log_2 3)$. **9.056.** $(-1; 91/9)$. **9.057.** $(-1/2; 2)$. **9.058.** $(0; 0{,}4) \cup (1; \infty)$. **9.059.** $(3; \infty)$. **9.060.** $(3; 4) \cup (4; \infty)$. **9.061.** $(0; 1)$. **9.062.** $[1; 4]$. **9.063.** $(-\infty; 0) \cup [1/2; \infty)$. **9.064.** $(-\infty; 11]$. **9.065.** $(-1; 4)$. **9.066.** $(-1; 0) \cup (3; 4)$. **9.067.** $(0; \infty)$. **9.068.** $(1; \infty)$. **9.069.** $(1; 1{,}04) \cup (26; \infty)$. **9.070.** $(4; 6)$. **9.071.** $(2; 3)$. **9.072.** $(-1; 1)$. **9.073.** $(-1; 1)$. **9.074.** $(1; \infty)$. **9.075.** $(1/3; 3)$. **9.076.** $(0; 0{,}25) \cup (4; \infty)$. **9.077.** $(0; \infty)$. **9.078.** $(-\infty; 0{,}5) \cup (1; \infty)$. **9.079.** $(-8; 1]$. **9.080.** $(-2; -1) \cup (-1; 2)$. **9.081.** $(2; 3)$. **9.082.** $(-\infty; -3) \cup (-2; -1)$. **9.083.** $(-1; 1)$. **9.084.** $(1/\lg 3; \infty)$. **9.085.** $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **9.086.** $(0; 1)$. **9.087.** $(2; 32)$. **9.088.** $(0; 40)$. **9.089.** $(1; \sqrt[3]{5})$. **9.090.** $[0; 4)$. **9.091.** $[0; 0{,}5]$. **9.092.** $[0{,}5; 4]$. **9.093.** $(2; \infty)$. **9.094.** $(0; 27)$. **9.095.** $(-1; 2)$. **9.098.** $(2; \infty)$. **9.099.** $[1; \infty)$. **9.100.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **9.101.** $(5/9; 1] \cup [6; \infty)$. **9.102.** $(-\infty; -3) \cup (2; 6]$. **9.103.** $(-3/2; 12/7)$. **9.104.** $(-\infty; -7/4)$. **9.105.** 11; 12; 14; 15. **9.109.** $[-0{,}5; 0) \cup (0; 0{,}5]$. **9.110.** $[37/7; 7]$. **9.111.** 1. **9.112** $(-6; 6)$. **9.113.** $[5; -3) \cup (3; 5]$. **9.114.** $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$. **9.115.** $(-\infty; -0{,}5)$. **9.116.** $(-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$. **9.117.** $(-6; 2)$. **9.118.** $(-7; 1)$. **9.119.** $(-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (5; \infty)$. **9.120.** 2; 3. **9.122.** $[5{,}5; \infty)$. **9.123.** $[0; 3) \cup (3; 4)$. **9.124.** $(0; 1/64) \cup (4; \infty)$. **9.125.** $[0; 2) \cup (4; 6]$. **9.126.** $(3; 3{,}5] \cup [5; \infty)$. **9.127.** $[-98; 2) \cup (2; 102]$. **9.128.** $(3; 3{,}5) \cup (3{,}5; 4)$. **9.129.** $(4; 5) \cup (5; \infty)$. **9.130.** $(-\infty; 4/3)$. **9.131.** $(0; 75) \cup (1{,}25; 2)$. **9.132.** $(1/3; 1) \cup (1; 2)$. **9.133.** $(-1; \sqrt[3]{4})$. **9.134.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/4 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.135.** а) $(a^4; 1/a)$, якщо $0 < a < 1$, і $(1/a; a^4)$, якщо $a > 1$; б) $(1; \sqrt[4]{2}]$. **9.136.** $(-2; 0) \cup (0; 1)$. **9.137.** $(1/8; 1/4) \cup (4; 8)$. **9.138.** $[1{,}5; 2)$. **9.139.** Якщо $m > 3$ і $m < -3$, то $\left(-\infty; \frac{1}{m-3}\right)$; якщо $-3 < m < 3$, то $\left(\frac{1}{m-3}; \infty\right)$; якщо $m = 3$, то $(-\infty; +\infty)$; якщо $m = -3$, то розв'язків немає. **9.140** $(-\infty; 2\sqrt{5} - 4)$. **9.141.** $(2; \infty)$. **9.142.** $[0; 1{,}6] \cup [2{,}5; \infty)$. **9.143.** $(2\sqrt{21}/3; \infty)$. **9.144.** $(0; 0{,}5) \cup (2; 3)$. **9.145.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/3 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.146.** $(\pi n/2; (\pi/8)(4n + 1))$, де $n \in \mathbf{Z}$. **9.147.** $((\pi/4)(2n - 1); (\pi/8)(4n - 1)) \cup ((\pi/8)(4n - 1); \pi n/2)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.148.** $(-2; 0) \cup (0; 1)$. **9.149.** $(-\infty; -4/3) \cup (-79/75; 3/2) \cup (2; \infty)$. **9.150.** $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$. **9.151.** $(-\infty; 0] \cup (4{,}5; \infty)$. **9.152.** $(0; 0{,}5) \cup [\sqrt{2}; \infty)$. **9.153.** $[-3; 1)$. **9.154.** $(-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$. **9.155.** $(1; 2) \cup (64; \infty)$. **9.156.**

$(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$. **9.157.** $(1; \infty)$. **9.158.** $(2; 5)$. **9.159.** $[27; \infty)$. **9.160.** $(-1/3; \infty)$. **9.161.** $(0; 1/3) \cup (243; \infty)$. **9.162.** $(-2; -5/3) \cup (0; 1/3)$. **9.163.** $(-3; -2) \cup (-1; 0)$. **9.164.** $(2/3; \infty)$. **9.165.** $(0; 0{,}5) \cup (2; \infty)$. **9.166.** $(0{,}01; \infty)$. **9.167.** $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$. **9.168.** $(1; 2\sqrt{3}]$. **9.169.** $(-2; -1{,}5) \cup [1; 2) \cup [5; \infty)$. **9.170.** $(-\infty; 2) \cup [3{,}5; 4) \cup [7; \infty)$. **9.171.** $(-\infty; -0{,}1] \cup [-0{,}001; 0)$. **9.172.** $(-\infty; -5/6] \cup [3; \infty)$. **9.173.** $[-3; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{6}; -2] \cup [2; \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3]$. **9.174.** $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3{,}5) \cup (4; \infty)$. **9.175.** $(4^{\log_{0,8} 0,2}; \infty)$. **9.176.** $(-\sqrt{14}; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \sqrt{14})$. **9.177.** $(-1/2; 1/3)$. **9.178.** $[1/8; 4]$. **9.179.** $(1; 3)$. **9.180.** $(2; 8)$. **9.181.** $(-4; -3) \cup (8; \infty)$. **9.182.** $(0; 0{,}5) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$. **9.183.** $(4; 10)$. **9.184.** $(-4/3; -1) \cup (-1; -1/2)$. **9.185.** $(-\sqrt[4]{12}; \sqrt[4]{12})$. **9.186.** $(-\infty; -5)$, $(-3; -1)$, $(1; 2)$. **9.187.** $(1; 3) \cup (3^9; \infty)$. **9.188.** $((\sqrt{34} - 1)/2; \infty)$. **9.189.** $(1; 4)$. **9.190.** $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$. **9.191.** $(2\pi n - \pi/4; \pi/2 + 2\pi n) \cup (\pi/2 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.192.** $[-1; \infty)$. **9.193.** $(1; 1 + 1/(2\sqrt[4]{2})) \cup (3; \infty)$. **9.194.** $(0; 2)$. **9.195.** $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$. **9.196.** $(0; \infty)$. **9.197.** $(-\sqrt{5}; \infty)$. **9.198.** $(1; 5)$. **9.199.** $(5; \infty)$. **9.200.** $(-2; 13)$. **9.201.** $(1; 2) \cup (3; \infty)$. **9.202.** $(0{,}25; 1) \cup (1; 4)$. **9.203.** $(0{,}2; 5)$. **9.204.** $(2^{-28}; 1)$. **9.205.** $(-3; -1)$. **9.206.** $a_2; a_1; a_3$. **9.207.** $(0; \pi/2]$. **9.208.** $4 \cup [5; 7]$. **9.209.** $(5; 8) \cup (8; 29)$. **9.210.** $(-8; -6{,}5) \cup (0; 5)$. **9.211.** $[1{,}75; 4)$. **9.212.** $(-1; 3)$. **9.213.** $(-2; 0]$. **9.214.** $(-1; 2)$. **9.215.** $(-\infty; -7) \cup (-7; -2] \cup (1; 7) \cup (7; 8] \cup (11; \infty)$. **9.216.** $(0; \sqrt{5}/5) \cup (1; 3)$. **9.217.** $(-\pi + 2\pi n; -5\pi/6 + 2\pi n) \cup (-\pi/6 + 2\pi n; 2\pi n) \cup (\arcsin(1/8) + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n) \cup (5\pi/6 + 2\pi n; \pi - \arcsin(1/8) + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.218.** $[0{,}8; 1)$. **9.219.** $(0; 1) \cup (1; 2)$. **9.220.** $(-\infty; -2] \cup [-1; (\sqrt{13} - 1)/6)$. **9.222.** $(-3; 6)$. **9.223.** $(1; 2)$. **9.224.** $(-5; -7\pi/6] \cup [\pi/6; 5\pi/6]$. **9.226.** $(-2; 4)$. **9.234.** $(\pi/2; 3)$. **9.236.** $(3; \infty)$. **9.237.** $(\log_4 13; 2]$. **9.238.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/4 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.239.** $(\pi/3 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n) \cup (3\pi/2 + 2\pi n; 5\pi/3 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.240.** $(2\pi n - 3\pi/4; 2\pi n - \pi/4) \cup (\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi n)$. **9.241.** $(\pi n - \pi/6; \pi/6 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.242.** $(\log_9 7; 1) \cup (1; \infty)$. **9.243.** $-5; 1$. **9.244.** $[1/2; 1)$. **9.245.** $[1/\sqrt{2}; 1/\sqrt[5]{4}) \cup (1; \sqrt{2}]$. **9.246.** $(-3; -1)$. **9.247.** $(-\infty; \log_4(\sqrt{3} - 1)) \cup (1{,}5; \infty)$. **9.248.** $(\log_3(28/27); \log_3 4)$. **9.249.** Якщо $0 < p < 1$, то $(p; 1) \cup (1/p; \infty)$; якщо $p > 1$, то $(1/p; 1)$. **9.250.** $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$. **9.251.** $(-\infty; 3)$. **9.252.** $(2; \infty)$. **9.253.** $(0; 1) \cup ((\sqrt{5} + 1)/2; 2)$. **9.254.** $(-\infty; -11)$. **9.255.** $((\sqrt{21} - 3)/2; 1) \cup (1; \infty)$. **9.256.** $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$. **9.257.** $[-2; 0) \cup (0; 2]$. **9.258.** $(5; \infty)$. **9.259.** $(-\infty; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; \infty)$. **9.260.** $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$. **9.261.** $(-\infty; (\sqrt{17} + 1)/4]$. **9.262.** $[5; \infty)$. **9.263.** $(-\infty; -0{,}5) \cup (1; \infty)$. **9.264.** $(\pi/6 + \pi n; \pi/4 + \pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.265.** $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$. **9.266.** $(2/3; 1) \cup (2; 6)$. **9.267.** $(3; \infty)$. **9.268.** $(-\infty; 0) \cup (5; \infty)$. **9.269.** $(-1; 0) \cup [1; \infty)$. **9.270.** $(0; 1) \cup [4/3; 4)$. **9.271.** $(3; 9)$. **9.272.** $[-1; -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}; 1]$. **9.273.** $[0; 16]$. **9.274.** $(-2; -1) \cup [-0{,}5; 0]$. **9.275.** $(-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5)$. **9.276.** $(2\pi n/5 - \pi/10; 2\pi n/5 - \pi/30) \cup (2\pi n/5 + \pi/10; 2\pi n/5 + 7\pi/30)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.277.** $(180^\circ \cdot n; 78^\circ + 180^\circ \cdot n) \cup (156^\circ + 180^\circ \cdot n; 168^\circ + 180^\circ \cdot n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.278.** $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$. **9.279.** $(0; a^2) \cup (1; \infty)$. **9.280.** $(0; 3^{\frac{2}{\log_3 7 - \log_7 3}})$. **9.281.** $(0; a) \cup (1/a^4; \infty)$.

9.282. $(-2; -1] \cup [-2/3; 1/3)$. **9.283.** $(\sqrt[5]{5}; 5)$. **9.284.** $(0; 3)$. **9.285.** $(\pi n - \pi/3; \pi n - \pi/9) \cup (\pi n; 2\pi/9 + \pi n) \cup (\pi/2 + \pi n; 5\pi/9 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.286.** $(\pi/12 + \pi n/2; \pi/6 + \pi n/2)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.287.** $(-\pi/4 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n) \cup (\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi n) \cup (5\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.288.** $(\pi n/8; (\pi/48)(1 + 6n))$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.289.** $(\pi n - \pi/8; \pi n) \cup (\pi/8 + \pi n; 3\pi/8 + \pi n) \cup (\pi/2 + \pi n; 5\pi/8 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.290.** $(360^\circ \cdot n - 95^\circ; 360^\circ \cdot n - 10^\circ) \cup (85^\circ + 360^\circ \cdot n; 180^\circ + 360^\circ \cdot n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.292.** $(\pi n - 7\pi/12; \pi n - \pi/2) \cup (\pi n - \pi/2; \pi n + \pi/12)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.295.** $((\pi/18)(12n - 7); (\pi/18)(12n + 1))$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.296.** $((\pi/3)(6n - 1); (\pi/3)(6n + 1))$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.297.** $x \neq (\pi/2)(4n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.300.** $(-\sqrt{12}; -2) \cup (2; \sqrt{12})$. **9.301.** $(2; 3)$, $a > 0$; $a \neq 1$. **9.302.** $[-1/3; 0) \cup (0; 1]$. **9.303.** 3. **9.304.** $x \in (0; 1)$. **9.305.** $a \in (-\infty; 0)$.

Глава 10

10.001. 8 і 15 см. **10.002.** $8\sqrt{5}$ і $4\sqrt{5}$ см. **10.003.** 10,625 см. **10.004.** $\sqrt{2n(m + n)}$, $\sqrt{4m^2 + 6mn + 2n^2}$. **10.005.** $4ab/(a + b)$. **10.006.** 0 і 1,5 см. **10.007.** 9 і 25 см. **10.008.** $\sqrt{10}$ см. **10.009.** 8/3, 25/3 і 5 см. **10.010.** $12\sqrt{3}$ і 36 см. **10.011.** 6 см. **10.012.** 13 см. **10.013.** 8 і 10 см. **10.014.** 6,25 см. **10.016.** $R(\sqrt{2} - 1)$. **10.017.** 12 і 6 см. **10.018.** $\sqrt{41}$ і 5 см. **10.020.** 7,5 см. **10.021.** m, $m\sqrt{3}$, $2m$. **10.022.** 60 і 30°. **10.023.** $1{,}6R\sqrt{2}$. **10.024.** 12 см. **10.025.** $r(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$, $r(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$. **10.026.** 6 см. **10.027.** $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$. **10.029.** $a(3 + \sqrt{3})/6$, $a(3 - \sqrt{3})/6$. **10.030.** $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$. **10.031.** $8\sqrt{3}/3$. **10.032.** 4 см. **10.033.** 3 см. **10.034.** 9 см. **10.035.** $3R^2\sqrt{3}/4$. **10.036.** 9, $9\sqrt{3}$ і 18 см. **10.038.** 15 і 30 см. **10.039.** 4, 8, $2\sqrt{2}$ і $2\sqrt{2}$ см. **10.040.** 294 см²; 12π см. **10.041.** 12, 10 і $2\sqrt{91}$ см. **10.042.** 2 см. **10.043.** 3/4. **10.044.** $a^2/\sqrt{4a^2 - b^2}$. **10.045.** 2 і $\sqrt{2}$. **10.046.** 65/18. **10.047.** 32 см. **10.048.** $3r$. **10.049.** 42 і 56 см. **10.050.** 29/4 см. **10.051.** 2 см. **10.052.** $a(2 - \sqrt{2})$. **10.053.** 2 : 1. **10.054.** 20/3 см. **10.055.** $a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})/2$. **10.057.** $3\sqrt{3}$ см. **10.058.** $m(2\sqrt{3} + 3)/3$. **10.059.** $r/8$. **10.060.** 6 і 8 см. **10.061.** 10, 17, 21 і $\sqrt{337}$ см. **10.062.** 12 і 20 см. **10.063.** $5\sqrt{m^2 + n^2}/6$, $5\sqrt{m^2 + n^2}/4$. **10.064.** 3, 4 і 5 см. **10.065.** $6r\sqrt{3}$. **10.066.** 5 см. **10.067.** 14 і 4 см. **10.068.** $18\sqrt{2}$ см. **10.069.** 18, 24 і 30 см. **10.070.** $R\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$. **10.071.** $4\sqrt{5}$ і $8\sqrt{5}$ см. **10.072.** 10 см. **10.073.** $3a^2/8$. **10.074.** $x\sqrt{2Rx - x^2}$. **10.075.** 1 см. **10.076.** $\sqrt{2} - 1$. **10.077.** 6 см. **10.078.** $\sqrt{5}$ см. **10.079.** $9\sqrt{5}$ і $8\sqrt{10}$ см. **10.081.** $3\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{27}$ см. **10.082.** $\sqrt{2S}/4$. **10.083.** $\sqrt{m^2 - 4S}/2$. **10.084.** 0,24 м². **10.085.** $5R^2$. **10.086.** У 64 рази. **10.087.** 9,4 кв. од. **10.088.** $3R^2\sqrt{3}/4$. **10.089.** $285{,}61\pi$. **10.090.** 1700 см. **10.091.** $\pi a^2/12$. **10.092.** $R^2\sqrt{3}/4$. **10.093.** $\pi(p - c)^2$. **10.094.** 25π м². **10.095.** 5, 5, 6 і 4 см. **10.096.** 8 см. **10.097.** $\sqrt{3}$ см. **10.098.** $(\sqrt{6} + 2) : 1$ або $(\sqrt{3} + 1) : 2$. **10.099.** $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$ і 4 см. **10.100.** 120 см². **10.101.** $a^2(2\sqrt{3} - 3)$. **10.102.** 96 см². **10.103.** 64π см². **10.104.** 25π см². **10.105.** $2(7 + 4\sqrt{3})$ см². **10.106.** $c^2/2$. **10.107.** $4/(\sqrt{3} + 1)^2$. **10.108.** $3a^2(7 - 4\sqrt{3})$. **10.109.** $a^2(3 + \sqrt{3})$. **10.110.** $2a^2(\sqrt{2} - 1)$. **10.111.** $2a^2/3$. **10.112.** $8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$. **10.113.** $a^2(4\pi - 3\sqrt{3})/36$.

10.114. $a^2(\pi-2)/8$. **10.115.** $R^2(3\sqrt{3}-\pi)/6$. **10.116.** $\pi R^2(3+2\sqrt{2})$. **10.117.** 48 см². **10.118.** $\sqrt{\dfrac{S(m^2+n)^2}{2mn}}$. **10.119.** $\dfrac{mnp^2}{2(m^2+n^2)}$. **10.120.** $5R^2\sqrt{3}/4$. **10.121.** $(4a+b)b\sqrt{3}/8$. **10.122.** 16 см. **10.123.** $\sqrt{2S}$. **10.124.** 1. **10.125.** 20π см. **10.126.** $(3\sqrt{3}-\pi)/(3\sqrt{3}+\pi)$. **10.127.** $a^2\sqrt{3}/8$. **10.128.** $a^2\sqrt{3}$. **10.129.** $2\sqrt{mn}(m+n)$. **10.130.** 16 см². **10.131.** $8Q/\pi$. **10.132.** 2 : 3. **10.133.** $27a^2\sqrt{3}/8$. **10.134.** 1024 см². **10.135.** 282,24 см². **10.136.** 54 см². **10.137.** πab. **10.138.** $r^2(2\sqrt{3}-\pi)/2$. **10.139.** $(\pi(a^2+b^2)-4ab)/8$. **10.141.** 5 см. **10.142.** 2 : 1. **10.143.** 3 : 1. **10.144.** 2, 2 і 4 м². **10.145.** 150 см². **10.146.** 80/3 см. **10.147.** 12 і 4 см. **10.148.** $h^2\sqrt{3}$. **10.149.** $R^2(\pi-2)/4$. **10.150.** $(c_1^2-c_2^2)/(4\pi)$. **10.151.** $(4\pi-3\sqrt{3})/(8\pi+3\sqrt{3})$. **10.152.** $\pi a^2/4$. **10.153.** $R\sqrt{1/3}$, $R\sqrt{2/3}$. **10.154.** $\sqrt{\dfrac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. **10.155.** $(\pi+\sqrt{3})R^2/2$. **10.156.** $R^2\sqrt{3}/2$. **10.157.** 9. **10.158.** 84 см². **10.159.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **10.160.** 24 і 30 см. **10.161.** 8,64 і 15,36 м². **10.162.** 75 см². **10.163.** $(65/32)^2$. **10.164.** 32 см². **10.165.** $\pi a^2/4$. **10.166.** 60 см². **10.169.** $R(\sqrt{4+\pi}\pm\sqrt{4-\pi})/2$. **10.170.** $\pi\left(\dfrac{Ra}{R+a}\right)^2$. **10.171.** $(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)/4$. **10.172.** 4. **10.173.** 5 см. **10.174.** $\sqrt{2S}/4$. **10.175.** $a^2\sqrt{3}/12$. **10.178.** $2mn/\sqrt{4m^2-n^2}$, $2m^2/\sqrt{4m^2-n^2}$. **10.179.** $R\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}$. **10.180.** 168 см². **10.181.** $3a^2/8$. **10.182.** $a^2/25$. **10.184.** 450 см². **10.185.** 25. **10.186.** 13 см. **10.187.** $H^2\sqrt{3}$. **10.188.** $3a^2/8$ або $2a^2/3$. **10.189.** 1. **10.190.** $3\pi\sqrt{15}:50$. **10.191.** $36/\sqrt{10}$, $12/\sqrt{10}$, $18/\sqrt{10}$ і $30/\sqrt{10}$ см. **10.192.** $14\pi+12\sqrt{3}$. **10.193.** 20 і 10 см або 5 і 40 см. **10.195.** 17 см. **10.196.** 75°. **10.197.** 3/2, 8/3 і 25/6 см. **10.198.** 14, 12,5, 29,4 і 16,9 см. **10.199.** 4 і $5\sqrt{41}/4$ см. **10.200.** $m(p+q)/q$, $m(p+q)/p$, $p+q$. **10.201.** 2 : 1. **10.203.** 85/8 см. **10.204.** 6,25 см. **10.205.** 20, 12,5, 5 і 12,5 см. **10.206.** 5, 5 і 6 см. **10.207.** 84/13 і 72/13 см. **10.208.** 6 і $2\sqrt{3}$ см. **10.209.** 120/17. **10.210.** $5\sqrt{2}$. **10.211.** 5 см. **10.212.** 15 і 20 см. **10.213.** 12π. **10.214.** $4\sqrt{3}+6$, $6\sqrt{3}+12$. **10.215.** 10. **10.216.** 8. **10.217.** Трапеція рівнобічна, бічна сторона дорівнює середній лінії. **10.218.** 6 см. **10.221.** $2\sqrt{5}$ см. **10.222.** $2R^2/\sqrt{Rr}$. **10.223.** 15, 20 і 25 см. **10.224.** 6 см. **10.225.** $\pi/2$. **10.226.** 6, 8 і 10 см. **10.227.** $b+c+d$. **10.228.** $15\sqrt{11}/11$ см. **10.229.** 9, 9 і $6\sqrt{2}$ см. **10.230.** 26 і 30 см. **10.231.** $4r$, $10r/3$, $2r$. **10.232.** $4\sqrt{2}$ і 18 см. **10.233.** $h\sqrt{3}/3$. **10.234.** 1 і 17 см. **10.235.** $m(\sqrt{5}+1)/2$ і m. **10.236.** $2\sqrt{5}$ і $5+\sqrt{5}$. **10.237.** pq. **10.238.** 1 : 3, 2 : 3. **10.239.** $\sqrt{10}$ см. **10.240.** 28/3 см. **10.241.** $bm/(b-m)$. **10.242.** 4,8. **10.243.** $14\sqrt{3}/3$ см. **10.244.** 7, 24 і 25 см. **10.245.** $ar/(a-r)$ і $a^2r/(a-r)^2$. **10.246.** $18\sqrt{5}/5$ см. **10.247.** $2a\sqrt{7}$. **10.248.** $0{,}5\sqrt{(14Rr-R^2-r^2)/3}$. **10.251.** У 7381 раз. **10.252.** 3 : 2, 3 : 1, 2 : 1. **10.253.** 130 см². **10.254.** $a\sqrt{3}/2$. **10.255.** 8 см. **10.256.** 3 см. **10.257.** $\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **10.258.** 5,8 см. **10.259.** 3 см. **10.260.** 5 см. **10.261.** 1 : 2. **10.262.** $2r^2/(h-2r)$. **10.266.** $\sqrt{(a^2+b^2)/5}$. **10.268.** На середині відрізка AB. **10.270.** 3 : 4. **10.271.** 150 см². **10.273.** $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{Q/q}}$ і $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{q/Q}}$. **10.276.** $5\sqrt{2}$ см. **10.277.**

$ab\sqrt{2}/(a+b)$. **10.278.** $a\sqrt{3}$, $5a\sqrt{3}/6$ і $5a\sqrt{3}/6$. **10.279.** 20 см². **10.280.** 30, 30 і 120°. **10.281.** 3 см. **10.282.** 1 : 2. **10.283.** 2 см. **10.284.** $R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)/3$. **10.285.** $R^2(\pi+\sqrt{3})/2$. **10.286.** $r^2(24\sqrt{3}-11\pi)/6$. **10.287.** $(3+\sqrt{3})$ см². **10.288.** $12\sqrt{5}$ см². **10.289.** $3a^2\sqrt{3}/16$. **10.290.** $\pi R^2r^2/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^4$. **10.291.** 3,6 см². **10.292.** $2R^2(3\sqrt{3}-\pi)/3$. **10.293.** $8R^3/a$. **10.294.** $8Rr\sqrt{Rr}/(R+r)$. **10.295.** $100\pi/9$ см². **10.296.** r^2+2Rr. **10.297.** $(m+n)^2/(mn)$. **10.298.** $\dfrac{3(4\pi-3\sqrt{3})\,p^2}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}$. **10.299.** $5\pi R^2/36$. **10.300.** $a^2(3\sqrt{3}-\pi)/18$. **10.301.** 10 : 1. **10.302.** $2S$. **10.305.** $\pi(b^2-2ac)/(4a^2)$. **10.306.** $R^2(3+\sqrt{2})/4$. **10.307.** $65\pi a^2/4$. **10.308.** $3a^2/2$. **10.309.** 8, 8, $8+4\sqrt{3}$ і $8-4\sqrt{3}$ см. **10.310.** 100π см². **10.311.** $25/(6\pi)$. **10.312.** $R^2(\pi-\sqrt{3})$. **10.313.** $R^2(2\pi-3\sqrt{3})/6$. **10.314.** 4,32 см. **10.315.** $15\sqrt{7}/4$ см². **10.316.** 200/3 см². **10.317.** 9 см². **10.318.** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.319.** a. **10.320.** 3/4. **10.321.** 8 см². **10.322.** 6 см. **10.323.** 8 або 6 см. **10.324.** $8/\sqrt{3}$, $26/\sqrt{3}$ і $30/\sqrt{3}$ см. **10.325.** 288 см². **10.326.** 16 м². **10.327.** $\sqrt{15}/2$ см². **10.328.** 2, 16, 3 і 0,84 см². **10.329.** 14 см². **10.330.** $-(b+\sqrt{b^2-2ac})/(2a)$. **10.331.** $(b-a^2)/2$. **10.332.** $\dfrac{p^2-m^2}{p}$, $\dfrac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}$. **10.333.** 96 і 156 см. **10.334.** $a^2(\pi-2)/2$. **10.335.** 14 см. **10.336.** $(5\pi-6\sqrt{3})/18$ см². **10.337.** $a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})/8$. **10.338.** $R^2(2\sqrt{3}-\pi)/2$; **10.339.** $2(3\sqrt{3}-\pi)$ см². **10.340.** $8R^2\sqrt{3}/3$. **10.341.** $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **10.342.** 45 і 135°. **10.343.** 235,2 см². **10.344.** 9,6 см². **10.345.** Прямокутний; 24 см². **10.346.** У 9 разів. **10.347.** $\angle A=\angle B$ або $\angle A+\angle B=120°$. **10.348.** 120 см². **10.349.** $R^2(\sqrt{3}+1)$. **10.350.** $2S/5$. **10.351.** 16,9 см. **10.352.** $\sqrt{3}$. **10.353.** У 2,56 рази. **10.354.** $(9\sqrt{3}+3\sqrt{15})/8$ см² $\approx$ 3,4 см². **10.355.** $4\sqrt{3}/3$, $4\sqrt{3}/3$ і $(9-5\sqrt{3})/3$. **10.357.** 80 см². **10.358.** $a\dfrac{3a-b}{a+b}$ при $b<3a$; $\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a-3b}{a+b}$ при $a>3b$. **10.359.** 2,4 см. **10.360.** 12 і 16. **10.361.** 10 см. **10.362.** $(2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)})/2$, $r\leqslant m(\sqrt{2}-1)/2$. **10.363.** 18 см. **10.364.** $2mn/(m+2n)$ і $n(m+n)/(m+2n)$. **10.365.** 30 і 60°. **10.366.** 20/3 і 15,4 см. **10.367.** $R(\sqrt{5}-1)/2$. **10.368.** 10 см. **10.369.** 6 або 4 см. **10.370.** $\dfrac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b+d-c)(c+a-b-d)\times(c-a+b+d)}$. **10.371.** $\angle A+\angle B=90°$ або $|\angle A-\angle B|=90°$. **10.372.** n. **10.373.** 16 см. **10.374.** Бічну сторону. **10.375.** $9R^2/4$. **10.376.** $MN=\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.377.** 8, 4 і 6 см. **10.378.** $2Rr/(R+r)$. **10.379.** m. **10.381.** 11/3 см². **10.385.** $S\left(1-\dfrac{3m^2}{(2n+m)^2}\right)$. **10.386.** 3 і 4. **10.387.** 45, 45 і 90°. **10.388.** $AB=AC=a\sqrt{2}/2$. **10.389.** 175/48 см. **10.390.** 33/4 см. **10.391.** 6 см. **10.392.** $R^2(8\sqrt{3}-9)/4$. **10.393.** 1,6 см². **10.395.** $a^2(3-3\sqrt{3}+\pi)/3$. **10.396.** $R^2(6\sqrt{3}-3\pi)\times(7-4\sqrt{3})/2$. **10.397.** $2R^2(3\sqrt{3}-\pi)/9$. **10.398.** $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$ **10.399.** $a^2(3\sqrt{3}-\pi)/18$. **10.400.** $\dfrac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$

10.401. $\sqrt{Q/(\pi-3)}$. **10.402.** $\pi R^2/6$. **10.403.** 1 см. **10.405.** $a\sqrt{3}(a-2b)/12$. **10.406.** Rp. **10.407.** 3 : 7. **10.408.** 125 см². **10.409.** $\sqrt{42}$ і $\sqrt{33}$. **10.410.** $a\sqrt{mn}\left(\frac{m+a-n}{a-n}\right)$. **10.411.** $(\sqrt{3}-1)S$. **10.412.** r, $4r/3$ і $5r/3$. **10.415.** $(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c})^2/4$. **10.416.**

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\times\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)}}.$$

10.417. 5. **10.418.** $(ad+bc):(ab+cd)$. **10.419.** $3136\pi/81$ см². **10.420.** $a(3+\sqrt{6})/6$ і $a(5+2\sqrt{6})$ або $a(3-\sqrt{6})\cdot 6$ і $a(5-2\sqrt{6})$. **10.421.** 11/3 см². **10.422.** $2a^2b^2/(a^2+b^2)$. **10.423.** 1,6 см². **10.424.** $\frac{a^2}{12}(9-5\sqrt{3})$ кв. од. **10.425.** $180\sqrt{3}/19$ см².

Глава 11

11.001 $c^3\sqrt{3}/48$. **11.002.** $R^3\sqrt{6}/4$. **11.003.** $a^3/24$; $a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})/4$. **11.004.** $Sd/2$. **11.005.** $\sqrt{3}$. **11.006.** 144 см³. **11.007.** 3. **11.008.** $ab\times\sqrt{6ab}/2$. **11.009.** $6V$. **11.010.** $a^2(\sqrt{5}+1)$. **11.011.** $3l^3/16$. **11.012.** $a^2(1+\sqrt{7})/2$, $a^3\sqrt{3}/12$. **11.013.** $2a^2$. **11.014.** $3h^3\sqrt{3}/2$. **11.015.** $3a^2\sqrt{3}/4$. **11.016.** $b^3\sqrt{3}/24$. **11.017.** $\sqrt{47}/24$ см³. **11.018.** $a^2b\sqrt{3}/12$. **11.019.** $(l^2-h^2)h\sqrt{3}/4$. **11.020.** $18\sqrt{2}$ дм³. **11.021.** 60,375 см². **11.022.** $a^3\sqrt{2}$. **11.023.** 26,25 дм². **11.024.** $(a^3-b^3)\sqrt{2}/6$. **11.025.** $(a^3-b^3)\sqrt{3}/12$. **11.026.** $2Q\sqrt{2}$. **11.027.** $2S\sqrt{S}/3$. **11.028.** $8r^3\times\sqrt{3}/3$, $24r^2$. **11.029.** $a^3/24$, $a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})/4$. **11.030.** $4\sqrt{3}$ см³. **11.031.** $a^3/6$, $a^2(\sqrt{2}+1)$. **11.032.** 108 см³. **11.033.** $21\sqrt{55}$ см³, 84 см². **11.034.** $3d^3\sqrt{3}/(10\sqrt{5})$. **11.035.** $2d^3\sqrt{2}$. **11.036.** $a^3\sqrt{2}/3$. **11.037.** $a^2(4+\sqrt{3})$. **11.038.** $2a(a+\sqrt{4b^2+a^2})$. **11.039.** $a^2\sqrt{3}$. **11.040.** 6 см³. **11.041.** $l^3\sqrt{2}/8$. **11.042.** 872 см³. **11.043.** $\sqrt{S_1S_2Q/2}$. **11.044.** $l^3\sqrt{3}/12$. **11.045.** $9d^3/64$. **11.046.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **11.047.** $2(a+b)\times\sqrt{3(a^2+b^2)}$. **11.048.** $3a^3/8$. **11.049.** $a^3/8$. **11.050.** $(3/2)\times\sqrt{(l^2-h^2)(3l^2+h^2)}$. **11.051.** $9\sqrt{2}/8$ см³. **11.052.** $\sqrt{3}(2Q+0{,}5a^2)$. **11.053.** $3h^2\sqrt{3}/2$. **11.054.** $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. **11.055.** $3a^2/2$. **11.056.** $2\sqrt{P^2+Q^2}$. **11.057.** $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$. **11.058.** $(\sqrt{3}/27)h^3\sqrt{9m^2-h^2}$. **11.059.** $\frac{1}{4l}\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M+P-N)\times(N+P-M)}$. **11.060.** $2P+\frac{4V}{\sqrt{P}}$. **11.061.** $6h^2$. **11.062.** $l^3\sqrt{2}/12$, $l^2(2+\sqrt{2})/2$. **11.063.** $a^3\sqrt{3}/6$, $3a^2$. **11.064.** $h^3\sqrt{3}/2$. **11.065.** $S\sqrt{3}$. **11.066.** $a^3\sqrt{2}/12$. **11.067.** $18\sqrt{3}$ см³. **11.068.** $3a^2$, $a^3\sqrt{2}/3$. **11.069.** $Q\sqrt{Q/3}$. **11.070.** $\frac{abS}{4(a+b)}$. **11.071.** $6\sqrt{1833}/47$. **11.072.** $\frac{mn}{m^2+n^2}Q\sqrt{Q}$.

11.073. 3 см. 11.074. $4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3$ м³. 11.076. $\sqrt{5}/5$. 11.077. $Sr/3$. 11.078. $V=CS$. 11.080. $2\pi(\sqrt{2}+1)\cdot a^2$, $2\pi a^3/3$. 11.081. $\pi R:p$. 11.082. $1152\pi/125$ см³. 11.083. $4\pi h^3/81$. 11.084. $\pi R^2\sqrt{5}$. 11.085. $\pi N+2M$, $N\sqrt{\pi M}/2$. 11.086. 24π см³. 11.088. 3 : 2 : 1. 11.089. $\pi R^3\sqrt{15}/3$. 11.090. $4\pi Q$. 11.091. 600π см², 1000π см³. 11.092. 216π см³, 448π см³. 11.093. $S:s=\pi:2$, $V:v=\pi\sqrt{3}:2$. 11.094. $s:S=v:V=4:9$. 11.095. $64\pi:27$. 11.096. $\pi(R^2+h^2)^2/h^2$. 11.097. 9/16. 11.098. $\pi Q\sqrt{Q}/(3\sqrt[4]{3})$. 11.099. $4\pi\sqrt{3}$ см², 2π см³. 11.100. $7V/27$. 11.101. $2S\sqrt{6\pi S}/(27\pi)$. 11.102. 8 м². 11.103. $2R\sqrt[3]{4}$. 11.104. $a^3\sqrt{2}/18$. 11.106. $9a^3\sqrt{11}/4$. 11.107. $16\sqrt{2,2(\sqrt{2}-1)}$ м². 11.108. ≈ 515 дм³. 11.109. $a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}/6$. 11.110. 3 см. 11.111. $4S$. 11.112. $m^2(2+\sqrt{2})/2$, $m^3\sqrt[4]{2}/6$. 11.113. 260 дм², 312 дм³. 11.114. 1900 м³. 11.115. $(S_1+S_2)h/2$. 11.116. 12 см³. 11.117. 906 см². 11.118. $a^3\sqrt{3}/2$, $a^2(1+2\sqrt{3}+\sqrt{13})$. 11.119. $a^3b/(12\sqrt{3a^2-4b^2})$. 11.120. $2\sqrt{6}/\pi^3$. 11.121. $\sqrt{6}$. 11.122. 37/27 і 152/27 см³. 11.123. $8Q\sqrt{3}/3$. 11.124. $a^3(\sqrt{2}-1)/8$. 11.125. $a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)/3$. 11.126. $3a^3/4$, $3a^2\sqrt{6}/2$. 11.127. $7a^3(\sqrt{2}-1)/3$. 11.128. $3a^2/4$, $a^3\sqrt{2}/32$. 11.129. $10\sqrt{19}$ см². 11.130. $1:\sqrt{2}$. 11.131. $ab\sqrt{12a^2-3b^2}/8$. 11.132. $S\sqrt{S}\sqrt[4]{27}/9$. 11.133. $a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})/4$. 11.134. $a^3/128$. 11.135. $(a^3-b^3)\sqrt{2}/6$. 11.136. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(2n+m)}{m}}\right)$. 11.137. $144\sqrt{3}/5$ см³. 11.138. 192 см². 11.139. $\sqrt{3}(2\sqrt{2}+3):6$. 11.140. $d^3\sqrt{2}/3$. 11.141. $4m^2\sqrt{3}$. 11.142. $S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{6}/2$. 11.143. $a^3(27\sqrt{2}-22\sqrt{3})/2$. 11.144. $c^3/32$. 11.145. $abc\sqrt{2}/3$. 11.146. $a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})/2$. 11.147. $8(11+\sqrt{34})$ м². 11.148. $VS_2\sqrt{S_2}:(S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1})$. 11.149. 12 дм³. 11.150. 1,9 м³. 11.151. $a^3/2$. 11.152. 9 : 1, 27 : 1. 11.153. 3 : 4. 11.154. $3al+a^2$. 11.155. $ab(\sqrt{2}+1)$. 11.157. $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. 11.158. $a^3\sqrt{2}/12$. 11.159. 200 см³. 11.160. $d_1\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}/12$. 11.161. $2PQ/(3a)$. 11.162. $a^2\sqrt{4b^2-2a^2}/12$. 11.163. $2pl+\frac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $2p=a+b+c$. 11.164. $a^3/8$, $a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})/4$. 11.165. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$. 11.166. $abc\sqrt{2}/2$. 11.167. $36\sqrt{2}$ см³. 11.168. $S\sqrt{S}/3$. 11.169. $\sqrt{6}$. 11.170. $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$. 11.171. $(2/3)R^3\sqrt{2/3}$. 11.172. $27\sqrt{2}/8$ куб. од. 11.173. $12R^2\sqrt{3}$. 11.174. $21R^3/16$. 11.175. $3ab$. 11.176. $2r^2(R+\sqrt{R^2-r^2})/3$ або $2r^2(R-\sqrt{R^2-r^2})/3$. 11.177. SL. 11.178. $(1/a):(1/b):(1/c)$. 11.179. $a^2\sqrt{3}/2$. 11.180. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab}$. 11.181. $\pi S\sqrt{5S}/21$ куб. од. 11.182. $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2R^3}{(\pi^2-1)}$. 11.183. 5 : 1. 11.184. $(6m-3n)/(4n)$. 11.185. $64\pi/9$ см². 11.186. $\pi h^3/24$. 11.187. $\pi a^2/6$. 11.188. πl^2, $2\pi R(l^2-R^2)/3$. 11.189. 3,75 см. 11.190. $\pi R^3\sqrt{2}/6$. 11.191.

$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. **11.192.** $(2\pi - 3\sqrt{3})/(10\pi + 3\sqrt{3})$. **11.193.** $10\pi h^3/9$. **11.194.** $2\pi dp$. **11.195.** $\pi R^3 \sqrt{15}/3$. **11.196.** $a^3(3\sqrt{2}-2)/3$. **11.197.** $a^3/4$. **11.198.** 336 см³, 396 см². **11.199.** $m^2n^2/(2l)$. **11.200.** 4 : 121. **11.201.** $a^3/12$. **11.202.** 3. **11.203.** $a^3/6$. **11.204.** $\frac{16a^3b^3}{3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2}}$, $b < a < \sqrt{2}b$. **11.205.** $a^3\sqrt{2}/54$. **11.206.** $\sqrt{9m^2-3a^2+6am}/(a-m)$. **11.207.** $2a^3(\sqrt{2}-1)$. **11.208.** $2a^2\sqrt{3}$, $a^3/3$. **11.209.** 20,25 см². **11.211.** $a^3\sqrt{6}/18$. **11.212.** $18d^2$. **11.213.** 24 м³. **11.214.** $9\sqrt{39}/4$ см³. **11.215.** $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **11.218.** $h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)/6$. **11.219.** $9a^3/64$. **11.220.** $(a+\sqrt{a}+1)/(2\sqrt{a})$. **11.222.** $2\pi a^2$, $a^3(2\pi+3\sqrt{3})/6$. **11.223.** $q^2(2-q)/4$ при $q<2$; при $q \geqslant 2$ задача не має розв'язку. **11.224.** $\pi R^3(4-\sqrt{7})/2$. **11.225.** $\pi h^3/l$. **11.226.** 12/19 м. **11.227.** $abc/\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. **11.229.** $a^3(5+\sqrt{5})/24$. **11.230.** $3H^2\sqrt{3}$. **11.231.** $\pi/3$, $2\sqrt{3}/3$. **11.233.** а) $5\sqrt{3}$ і $\sqrt{51}$; б) ні.

Глава 12

12.001. $\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}$. **12.002.** $\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **12.003.** $\cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{6}$. **12.004.** $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, де $\operatorname{arctg} 2 \leqslant \alpha < \pi/2$. **12.005.** $h \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **12.006.** $\frac{1}{3}\sqrt{S \sin 2\alpha}$. **12.007.** $\frac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. **12.008.** $\frac{b \sin\alpha}{a + b\cos\alpha}$ і $\frac{a\sin\alpha}{b + a\cos\alpha}$. **12.009.** $\frac{a\cos(\alpha/2)}{\sin(45^\circ + 3\alpha/4)}$. **12.010.** $\frac{8R}{\sin\alpha}$. **12.012.** $\arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. **12.013.** $\frac{1}{2k}$. **12.014.** $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. **12.015.** $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.016.** $\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2+2h_1h_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.017.** $2d\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi(3m+n)}{4(m+n)}$. **12.018.** $\arccos\frac{k-1}{k}$ і $\pi - \arccos\frac{k-1}{k}$, $k > 1$. **12.019.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}(\alpha/2)/3}$. **12.020.** $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2(\alpha/4)}$. **12.021.** $\frac{4r\cos^2(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$. **12.022.** $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$. **12.023.** $\frac{a}{4}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+9}$. **12.024.** $\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. **12.025.** $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\alpha-\pi/2}$. **12.026.** $2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$ і $\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$. **12.027.**

$\dfrac{4R^2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$. **12.028.** $\dfrac{r\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2)}{\sin 2\alpha}$. **12.029.** $\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}\times \times\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.030.** $\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$. **12.031.** $2\sqrt{5}/5$. **12.032.** $r^2\,\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$. **12.033.** $\dfrac{P\sin\alpha}{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.034.** $2\sin 2\alpha\times \times\sin^2\alpha/\pi$. **12.035.** $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **12.037.** $2\cos^2\dfrac{\alpha}{4}$. **12.038.** 30°. **12.040.** $\dfrac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, 16 кв. од. **12.041.** $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$. **12.042.** $R^2(\alpha+\sin\alpha)$. **12.043.** $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin(3\alpha/2)}$. **12.044.** $2d^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+ +\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **12.045.** $\dfrac{1}{3}\pi d^3\,\mathrm{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **12.046.** $\dfrac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.047.** $\dfrac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **12.048.** $2\arcsin\dfrac{\alpha}{2\pi}$. **12.049.** $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **12.050.** 1/7. **12.051.** $\dfrac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$. **12.052.** $\dfrac{\pi}{3}ab(a+b)\times \times\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$. **12.053.** $2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}/5)$. **12.054.** $\dfrac{\pi H^3}{12}\sin^2\alpha\,\sin^2 2\alpha$. **12.055.** $\dfrac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.056.** $\dfrac{8\pi r^2\cos^2(\pi/4-a/2)}{\sin^2\alpha}$. **12.057.** $\dfrac{d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha}{8}$. **12.058.** $\sqrt[3]{\dfrac{4V\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)}{\pi}}$. **12.059.** $\arccos(1/9)$. **12.060.** $\dfrac{a^3\sin(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\beta}{6}$. **12.061.** $\dfrac{(a^2-b^2)(a-b)\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{8}$. **12.062.** $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\mathrm{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$. **12.063.** $\dfrac{2h^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin\beta}{3}$. **12.064.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin(\alpha/2)}$. **12.065.** $\dfrac{\sqrt{3}l^2\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. **12.066.** $\dfrac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}$. **12.067.** $\dfrac{1}{8}l^3\sin 2\beta\cos\beta\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$. **12.068.** $\arcsin\dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. **12.069.** $\dfrac{\pi S}{\sin\dfrac{\pi n}{m+n}}$. **12.070.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **12.071.** $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **12.072.** $\dfrac{H^3}{3}\mathrm{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. **12.073.** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$. **12.074.** $1-k$. **12.075.** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{4m}{\pi n}$ при $\dfrac{m}{n}<\dfrac{\pi}{4}$ і $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\pi n}{4m}$ при $\dfrac{m}{n}>\dfrac{\pi}{4}$. При $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\pi}{4}$ задача не має розв'язку. **12.076.** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{2\sin\alpha}$. **12.077.** $\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. **12.078.**

$2 \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}}$, $0 < k < \sqrt{3}$. **12.079.** $\arcsin \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$. **12.080.** $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.081.** $\operatorname{arcctg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}$. **12.082.** $2 \operatorname{arctg}(\cos\alpha)$. **12.083.** $2 \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.084.** $\sqrt{6}/6$. **12.085.** $\arcsin(\sqrt{6}/3)$. **12.086.** $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. **12.087.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **12.088.** $\arcsin\frac{\sqrt{12cV}}{c^2}$. **12.089.** $\frac{1}{8}(P^2 - 4l^2\sin^2\alpha)\, l\cos\alpha$. **12.090.** $\frac{\pi l^3 \sin 2\beta \cos\beta}{8\cos^2\alpha}$. **12.091.** $2\pi a^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2}$. **12.092.** $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$. **12.093.** $\cos 2\alpha$, від основи. **12.094.** $V \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **12.095.** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$. **12.096.** $\frac{\pi l^3}{12}\sin^3 2\alpha$. **12.097.** $\frac{n(a^2-b^2)\operatorname{ctg}(\pi/n)}{4\cos\alpha}$. **12.098.** $\frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$. **12.099.** $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}$. **12.100.** $\frac{a^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{2}$. **12.101.** $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\alpha/2}$. **12.102.** $\frac{2V\cos^2(\alpha/2)\sin\alpha}{\pi}$. **12.103.** $\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2(\beta/2)}$. **12.104.** $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$. **12.105.** $\frac{\pi h^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.106.** $\frac{3H^2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin^2(\alpha/2)}$. **12.107.** $\arccos(1/3)$. **12.108.** $\operatorname{arctg}\frac{2m}{m+n}$. **12.109.** $\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. **12.110.** $\frac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. **12.111.** $\frac{a^3\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.112.** $\frac{\pi d^2}{2\sin^2(\pi/4-\alpha/2)\sin\alpha}$. **12.113.** $\arccos\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, $\arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. **12.114.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. **12.115.** $\frac{7}{25}$. **12.116.** $\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. **12.117.** $\frac{2\sin\alpha}{\pi}$. **12.118.** $-\frac{1}{3}$. **12.119.** $\frac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3(\pi/4-\alpha/2)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. **12.120.** $\frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$. **12.121.** $\frac{a}{3\sin(\alpha/2)}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.122.** $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3(\alpha/2)}$. **12.123.** $\frac{\pi a^3\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)}{6\cos^4(\alpha/2)}$. **12.124.** $\frac{d^2\cos^2(\pi/4-\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}$. **12.125.** $\frac{4S\sqrt[4]{3}}{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}$. **12.126.** $2\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$. **12.127.** $\frac{d^2\sin\alpha}{2}$. **12.128.** $\frac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2(\pi/4+\alpha)}$. **12.129.** $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$. **12.130.** $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **12.131.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.132.** $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **12.133.** $\frac{\sin\alpha}{2\alpha - \sin\alpha}$. **12.134.**

$\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$. 12.135. $\frac{2a\cos^4\frac{\pi-\alpha}{4}}{\pi\sin^2(\alpha/2)}$. 12.136. $\frac{p^2+ap-q^2}{p}$.

12.137. $\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.138. $-\cos 2\alpha$. 12.139. $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

12.140. $\frac{2\sin(\alpha-\pi/6)}{\cos\alpha}$ від основи. 12.141. $\frac{h\cos(\pi/4+3\alpha/2)}{2\cos^2\alpha\cos(\pi/4-\alpha/2)}$.

12.142. $R^2/4$. 12.143. 1/13. 12.144. 72/97. 12.145. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$.

12.146. $\operatorname{arctg}\frac{n\sqrt{3}}{2m+n}$. 12.147. 7/18. 12.148. $\operatorname{arctg}\frac{3k}{2}$. 12.149. $\frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. 12.150. $\frac{1}{k-1}$, $k>2$. 12.151. $\frac{\pi}{4}\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}$.

12.152. $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$; $k\geqslant\frac{2}{\pi-2}$. 12.153. $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$.

12.154. $2\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ і $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. 12.155. $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}$.

12.156. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$. 12.157. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}$.

12.158. $\frac{3}{5}$ і $\frac{4}{5}$. 12.159. $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ і $\pi-\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. 12.160. $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ і $\pi-\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2}\leqslant k<2$. 12.161. 1/3, $\sqrt{3}/3$. 12.162. $\frac{R}{2\cos^2\frac{(\pi+2)R-l}{4R}}$. 12.164. $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 12.165. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$.

12.166. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$ і $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$; $0<k\leqslant\frac{3}{4}$. 12.167. $\frac{R^2\sin\alpha}{8}\times(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha)$. 12.168. $\sqrt{a^2+2ah\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.169. $3-\sqrt{5}$.

12.170. $\frac{S\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$. 12.171. $\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$. 12.172. $\frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$.

12.173. $\frac{a\cos(\beta+\alpha/2)\cos(\beta-\alpha/2)}{\sin\alpha\cos\beta}$. 12.174. $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$.

12.175. $\dfrac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **12.176.** $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **12.177.** $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha -$ $- b\cos\alpha$. **12.178.** $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}}{2\sin(\pi/4+\alpha/2)}$. **12.179.** 4/5. **12.180.** 5/13.

12.181. $\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sqrt{3}}$; $\alpha\leqslant 120^\circ$. **12.182.** $\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$.

12.183. $-3/5$. **12.184.** $\dfrac{m}{4\sin^2(\alpha/2)}$. **12.185.** $\sqrt{a^2+4S\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.186. $\pi/6$. **12.187.** $-\dfrac{1}{2}S\operatorname{ctg}\alpha\sin 4\alpha$. **12.188.** $P_a>P_b>P_c$.

12.189. $\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{m+n}{|n-m|}\sqrt{3}$. **12.190.** $\arcsin(\sqrt{21}/7)$ і $\arcsin(\sqrt{21}/14)$.

12.191. $a(\pi-\alpha-\beta)\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.192.** $2\arccos\dfrac{(a+b)l}{2ab}$.

12.194. 2 кв. од. **12.196.** $\dfrac{a}{2\cos(\alpha/2)}$. **12.197.** $\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

12.198. $\dfrac{h}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}$. **12.199.** $\dfrac{\pi a^2}{18}(2-\sqrt{3})$. **12.200.** $\dfrac{a\sin\alpha}{2\sin(\pi/4+\alpha)}$.

12.201. $\dfrac{S}{\cos(\alpha/2)\sin^3 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

12.202. $\dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{\sin^4(\pi/4-\alpha/2)}{\sin\alpha}$. **12.203.** $\dfrac{1}{12}a^3\operatorname{tg}\varphi$ і $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3(4\operatorname{tg}^2\varphi+1)}$.

12.204. $\dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.205.** $\dfrac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$. **12.206.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{49\cos\alpha}$ і $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{48}$. **12.207.** $\dfrac{9p^3\operatorname{tg}^3(\alpha/2)}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2(\alpha/2)-1}}$. **12.208.** $\dfrac{\sqrt{3}p^3\sqrt{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.209. $2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$ і $\dfrac{h^3}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **12.210.** $\dfrac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

12.211. $\dfrac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3(\beta/2)}$. **12.212.** $\dfrac{b\sin\alpha}{4\cos^2(\alpha/4)}$. **12.213.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.214. $\dfrac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$ і $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\pi/4-\varphi/2)}{\cos\varphi}$. **12.215.** $\dfrac{16}{3}\times$ $\times S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\dfrac{2S\sin(\alpha-\pi/6)\sin(\alpha+\pi/6)}{\sin 2\alpha}}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

12.216. $\arccos(1/\sqrt[4]{2})$. **12.217.** $\arcsin(2/\sqrt{5})$. **12.218.** $\dfrac{a^3\sin^2\beta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.219.** 4/5. **12.220.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$. **12.221.** $\dfrac{l}{3}\times$

$\times \sqrt{5-4\cos 2\alpha}$. **12.222.** $2\sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. **12.223.** $\frac{2S}{3\cos(\alpha/2)} \times \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.224.** $\frac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. **12.225.** $\frac{1}{2}H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **12.226.** $\frac{S\sqrt{2S\sin\alpha}\operatorname{ctg}\beta}{6\sin\alpha\cos(\alpha/2)}$.

12.227. $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}$. **12.228.** $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$. **12.229.** $\frac{4na^2\sin(\alpha/2)\sin(\alpha/2+\pi/n)}{\sin\frac{\pi}{n}}$. **12.230.** $\frac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$.

12.231. $\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$. **12.232.** $\frac{2\pi}{\sin 2\alpha}$. **12.233.** $\frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$.

12.234. $\frac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$. **12.235.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{5}+1}$. **12.236.** $\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.237.** $\frac{\pi c^3}{6}\sin 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **12.238.** $\arcsin(4/5)$.

12.239. $\frac{4-k}{4+k}$, $0<k<4$. **12.240.** $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$, $0<k\leqslant\frac{1}{8}$. **12.241.** $\frac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^2}$. **12.242.** $2\sin^2 2\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

12.243. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(4\operatorname{ctg}^2\alpha+3)$. **12.244.** $-\frac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$. **12.245.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$, $k\geqslant 2$. **12.246.** $2\operatorname{arcctg}\pi$.

12.247. $\frac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2(\pi/6+\alpha)}$. **12.248.** $2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$. **12.249.** $\frac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$. **12.250.** $\frac{\pi\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{4\sin\alpha\cos^3(\alpha/2)}$. **12.251.** $\pi-\arccos\frac{n^2}{m^2}$. **12.252.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{k}{2\sin(\pi/n)}$, $0<k\leqslant 2\sin\frac{\pi}{n}$.

12.253. $\frac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$. **12.254.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **12.255.** $\frac{l}{2\cos^2(\alpha/2)}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. **12.256.** $\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$.

12.257. $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. **12.258.** $\frac{a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi+2\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. **12.259.** $\frac{a(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{3a-b}$. **12.260.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos(\beta/2)}$. **12.261.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)$. **12.262.** $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}$.

12.263. $\dfrac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^3\alpha}$. 12.264. $\dfrac{2(m+n)H^2}{m-n}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 12.265. $\dfrac{2\pi a^3}{3\cos\alpha\sin 2\alpha\cos^2\dfrac{\pi q}{p+q}}$. 12.266. $\arccos(\sqrt{3}-1)$ i $\dfrac{\pi}{2}-\arccos(\sqrt{3}-1)$.

12.267. $\dfrac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{k}$, $k>\pi$. 12.268. $\dfrac{H^3\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$.

12.269. $\dfrac{1}{4}\pi a^2(3\sin^2\alpha+1)\operatorname{ctg}\alpha$. 12.270. $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.271. $\dfrac{l}{2}\times\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$. 12.272. $\dfrac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\times\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 12.273. $\dfrac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

12.274. $\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}(k-1))$. 12.275. $\dfrac{2H^2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

12.276. $\dfrac{2V\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)}$. 12.277. $\dfrac{l^3\sin(\alpha/2)}{3\sin^2\beta}\sqrt{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)}$.

12.278. $\dfrac{S\operatorname{tg}\beta}{6}\sqrt{S\sin\alpha}$. 12.279. $\sqrt{-k}$, $-1<k<0$. 12.280. $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$. 12.281. $16k^2-1$. 12.282. $\arccos(\sqrt{5}/30)$. 12.283. $a^2/\sqrt{-\cos\alpha}$. 12.284. $2\operatorname{arctg}(2k\times\sqrt{3})$, $0<k<\sqrt{3}/6$. 12.285. $\dfrac{\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}{\pi-\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}$. 12.286. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. 12.287. 24/65. 12.288. $\dfrac{3k}{k^2-2}$. 12.289. $\arccos\dfrac{1}{k-1}$, $k>2$. 12.290. $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-2t}\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$. 12.291. $(1+k)/2$. 12.292. $2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$. 12.293. $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta}{2\cos\dfrac{\pi-\alpha}{4}}$. 12.294. $2a^3\cos^3\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

12.295. $2r^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 12.296. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$.

12.297. $\dfrac{a\sqrt{\sin(\pi/3+\alpha/2)\sin(\pi/3-\alpha/2)}}{\sin(\alpha/2)}$. 12.298. $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. 12.299. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ i $\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$. 12.300. 1/4. 12.301. $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin(\alpha/2)}{\sin\varphi}\times\sqrt{\cos\left(\varphi+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. 12.302. $S\operatorname{tg}\varphi\times$

$\times \sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$. **12.303.** $\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$.

12.304. $l^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **12.305.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.

12.306. $\dfrac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$. **12.307.** $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.308. $\dfrac{a^2b}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$.

12.309. $\arccos\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$. **12.310.** $\dfrac{R}{\sin(3\alpha/2)}\times$

$\times\sqrt{\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **12.311.** $\dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4(\alpha/2)}$.

12.312. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos(\alpha/2)}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

12.313. $2H\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$. **12.314.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-8}}{2}$.

12.315. $\dfrac{\pi a^3}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **12.316.** $\arcsin\dfrac{6}{\pi k}$ i $\pi-$

$-\arcsin\dfrac{6}{\pi k}$; $k\geqslant\dfrac{6}{\pi}$. **12.317.** $\dfrac{\pi a^3}{12}\sin^5\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.318. $\dfrac{R\sqrt{2}\sin(\alpha/2)}{2\cos\dfrac{\alpha}{8}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{8}\right)}$. **12.319.** $\dfrac{n\sin^2 2a\sin^2\alpha\sin(2\pi/n)}{4\pi}$.

12.320. $\arccos(\sqrt{2}/4)$. **12.321.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3 2\alpha}{128\sin^3(\pi/4+\alpha)}$. **12.322.**

$\dfrac{\pi l^3\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$. **12.323.** $\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$.

12.324. $\dfrac{a^2\sin^2(\pi/3-\alpha)}{2\sin^2(\pi/3+\alpha)}$. **12.325.** $-\dfrac{b^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}$.

12.326. $\pi n^2a^2\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **12.327.** $\dfrac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.328. $\dfrac{\pi a^3}{12}\left(3-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.329.** $8\pi a^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\right.$

$\left.+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.330.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}r^3\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.331. $\dfrac{\sin^4(\alpha/2)}{\cos\alpha}$. **12.332.** $\sqrt{\dfrac{S}{\sin 2\alpha}}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{4}$. **12.333.**

$p^3\operatorname{tg}^3\dfrac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **12.334.** $8a^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.335. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\,\sin^2\beta\,\sin\alpha$. 12.336. $l\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times$ $\times\sqrt{\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos(\beta/2)}}$. 12.337. $\mathrm{arctg}\left(\frac{3V\cos(\alpha/2)}{S}\times\right.$ $\left.\times\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{S}}\right)$. 12.338. $\frac{V^2}{V^2+a^6}$. 12.339. $\frac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$, $2\sin\alpha<k<2$. 12.340. $\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$. 12.341. $\frac{4k^2}{4k^2+1}$. 12.342. $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. 12.343. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.344. $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ і $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. 12.345. $\frac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

12.346. $\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$ і $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$. 12.347. $\arccos(-a^4/S^2)$. 12.348. $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin(\pi/3-\alpha/2)}{\sin(\pi/3+\alpha/2)}}$. 12.349. 23/26. 12.350. $\frac{a\cos(\alpha/2)}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$; недопустимо $\alpha\geqslant\frac{2\pi}{3}$. 12.351. $\mathrm{arctg}\frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$. 12.352. $\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.353. arctg 2. 12.354. $\frac{a^3}{12}\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. 12.355. $\frac{8\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$. 12.356. arccos(3/5). 12.357. $\arcsin\frac{S}{l^2}\pm$ $\pm\frac{\pi}{3}$, $\arcsin\frac{S}{l^2}$. 12.358. $4R^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 12.359. $\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{3}$. 12.360. $\frac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. 12.361. $\frac{nR^2\,\mathrm{ctg}^2(\beta/2)\,\mathrm{tg}(\pi/n)}{\cos\beta}$. 12.362. $\frac{2a^2\sin\beta\cos^2(\pi/4-\alpha/2)}{\cos\alpha}$. 12.363. $\frac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2(\alpha/2)}$. 12.364. $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$. 12.365. $\pi R^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$. 12.366. $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. 12.367. $\frac{2\pi l^2\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)}{9\sin 2\alpha}$. 12.368. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$. 12.369. $\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$. 12.370. $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\frac{2}{\sin\alpha}$ і $\mathrm{arctg}\frac{2}{\cos\alpha}$. 12.371. $\frac{Ha\sin\alpha}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}}$. 12.372. $2\arccos(1/\sqrt[4]{4k})$. 12.373. $\frac{3\sqrt{3}H^3\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha}{8\sin\beta}$.

12.374. 7/15. **12.375.** $\frac{a^3\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$. **12.376.** $\frac{\pi a^3\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^3(\alpha/2)}$.
12.377. $\frac{a^3}{3}\sin\alpha\sin^4\frac{\alpha}{2}$. **12.378.** $\frac{2}{3}R^3\sin 2\alpha\,(1-\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)$.
12.379. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin 2\alpha\sin 4\alpha$. **12.380.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$
12.381. $-\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. **12.382.** $\sin\beta\sqrt{-\frac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$. **12.383.** $\operatorname{arctg}(4/3)$. **12.384.** $\frac{c^3}{36}\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **12.385.** $\frac{1}{2}\pi a^3\times\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; при $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **12.386.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha\right)$.
12.387. $\frac{V}{3\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **12.388.** $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$ і $\pi-2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$.
12.389. $\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **12.390.** $\frac{R\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$.
12.391. $\sqrt{a^2+b^2+2b(\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\cos\alpha+b\sin^2\alpha)}$. **12.392.** $\frac{4R^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}$. **12.393.** $\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.
12.394. $4R\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$. **12.395.** $2\arcsin\frac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$ і $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$, $0<m\leqslant\frac{1}{2}$. **12.396.** $\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$ і $\pi-\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **12.397.** $\frac{h}{\sin^2(\alpha/2)}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. **12.398.** $\frac{d^2}{8}\left(4\cos\frac{\alpha}{2}-\pi\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.399.** $\operatorname{arctg}\frac{2ah}{a^2-b^2}$. **12.400.** $\frac{H^2}{2}\sin B\cos(A-C)$.
12.401. $\frac{4a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **12.402.** $\operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{4S}$. **12.403.** $\arcsin\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$ і $\pi-\arcsin\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$; $k\geqslant\sqrt{2}$. **12.404.** $3\arccos\frac{2+k}{2k}$ і $\pi-3\arccos\frac{2+k}{2k}$.
12.405. $(4\sqrt{3}\pm 3)/10$. **12.406.** 3/5 або 1. **12.407.** $-23/27$. **12.408.** $b^2\operatorname{ctg}^2\beta\,(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta))/4$. **12.409.** $\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$. **12.410.** $0{,}5a\operatorname{ctg}\alpha$. **12.413.** $R^2\sqrt{2}/4$. **12.414.** $\operatorname{arcctg}(\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\gamma))$ і $\operatorname{arcctg}(\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\gamma+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\beta))$. **12.415.** $\pi/6$,

$\pi/3$, $2\pi/3$ і $\pi/3$. **12.416.** $\pi/3$. **12.417.** $2\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{m+n}{m}} - \frac{\pi}{2}$. **12.418.** $2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. **12.419.** $4\pi S\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **12.420.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1} - 2\operatorname{ctg}\alpha)$. **12.421.** $\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}(\alpha/2)}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$. **12.422.** $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. **12.423.** $\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin(\pi/3-\alpha/2)}{9\sin(\pi/3+\alpha/2)}$. **12.424.** $\frac{1}{24}(ab+b^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\alpha$. **12.425.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2k-3}}$, $k>\frac{3}{2}$. **12.426.** $\frac{1}{2}\arccos(-4b^2/a^2)$. **12.427.** $\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}$. **12.428.** $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$ і $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. **12.429.** $\pi/3$. **12.430.** $\operatorname{arctg}2$. **12.431.** $2\arcsin\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. **12.432.** $\operatorname{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$. **12.433.** $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **12.434.** $\frac{H^3\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\operatorname{tg}\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}$. **12.435.** $\frac{a^2b}{4}\times$ $\times\sqrt{3-4(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)}$. **12.436.** $\frac{b}{\cos(\alpha/2)}\times$ $\times\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.437.** $\frac{ab^2\sin\alpha}{2\cos\beta}\times$ $\times\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$. **12.438.** $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cos^5(\alpha/2)}$. **12.439.** $\frac{a^3\sin 2\alpha\cos\alpha\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. **12.440.** $2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$ і $3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $2\sqrt{3}/3\leqslant k<3/2$. **12.441.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. **12.442.** $\arccos(3/4)$. **12.443.** $\arccos\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$. **12.444.** $-\frac{1+3\cos 2\alpha}{4}$. **12.445.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. **12.446.** $\operatorname{arctg}\frac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$. **12.447.** $\frac{1}{3}$. **12.448.** $\frac{1}{24}(a+b)^2\times$ $\times\sqrt{a(a-2b)}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. **12.449.** $\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. **12.450.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/5)$. **12.451.** $\arccos(8k^2-1)$; $0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.452.** $\frac{h^3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\varphi}{2\cos^2(\alpha/2)\cos^2(\beta/2)}$. **12.453.** $5/12$. **12.454.** $\frac{a^2}{8}\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha$. **12.455.**

$\frac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$. **12.456.** $\frac{3\sqrt{3}H^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{8}$.

12.457. $\frac{H^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin 2\beta\sin\beta}$. **12.458.** $\frac{7a+3b}{144\cos\alpha}\times$ $\times\sqrt{3(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)}$. **12.459.** $\frac{H}{4}\,\mathrm{ctg}^2\alpha\,(\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\alpha}-1)$.

12.460. $\pi/4$ і $\mathrm{arctg}\,2$. **12.461.** $\mathrm{arcctg}\,(4\pm2\sqrt{2})$. **12.462.** $\frac{2}{3}l^3\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\sin\beta\sin 2\beta$. **12.463.** $\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6(\alpha/2)}$. **12.464.** $\arccos(2/3)$.

12.465. $\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{2\sqrt{3}k\pi-27}}{6}$; $k>\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

Глава 13

13.001. 48; 80; 12; 12. **13.002.** 200 кг. **13.003.** 40 і 30 л. **13.004.** 20 і 30 год. **13.005.** 48. **13.006.** 136 га. **13.007.** На 38,8 %. **13.008.** 70 кг. **13.009.** 500. **13.010.** 125 м². **13.011.** На 6 %. **13.012.** На 20 %. **13.013.** На 7,1 %. **13.014.** 80; 100; 90. **13.015.** 400 км. **13.016.** 4/7, 8/21, 12/35. **13.017.** 520. **13.018.** 240 крб. **13.019.** 10 хв. **13.020.** 12. **13.021.** 3. **13.022.** 240. **13.023.** 420 і 400. **13.024.** 68 га. **13.025.** 60 км. **13.026.** 6 і 2 год. **13.027.** 32. **13.028.** 4/7, 8/21; 20/49. **13.029.** 5. **13.030.** 1260, 1050 і 945 крб. **13.031.** 150 км. **13.032.** За 3 год 45 хв. **13.033.** 8 і 9,6. **13.034.** 720 і 150. **13.035.** 5000 пар. **13.036.** 2,5 кг. **13.037.** 475, 480 і 375 ц. **13.038.** 40; 32; 24. **13.039.** На 13,2 %. **13.040.** 900, 360 і 150 крб. **13.041.** 150 і 450 г. **13.042.** 26 га. **13.043.** 105, 135 і 175 км. **13.044.** 1,8 і 3 т. **13.045.** 13,5 кг. **13.046.** Сірки 3 кг, селітри 19,5 кг, вугілля 2,5 кг. **13.047.** 20 скрипалів, 8 віолончелістів і 4 сурмачі. **13.048.** 2850, 2250 і 1950 км. **13.049.** 280; 200; 220. **13.050.** 49 крб. 80 к. **13.051.** Можна збільшити на 2 дм. **13.052.** 3 × 4 км. **13.053.** 100 і 60 г. **13.054.** 3150 і 3450 ц. **13.055.** 33. **13.056.** $(-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs})/(2b)$ і $(ab+\sqrt{a^2b^2+4abs})/(2b)$ л. **13.057.** 12, 16 і 20 Н. **13.058.** $\frac{3l}{2(b-a)}$ м/с, має смисл при $b>a$. **13.059.** На 45. **13.060.** 15 дм². **13.061.** 40 к., 60 к., 80 к., 1 крб. **13.062.** 15. **13.063.** 21. **13.064.** 8. **13.065.** 48 і 60. **13.066.** 175 і 450 кг. **13.067.** 72 і 98 чоловік. **13.068.** 75 і 100 крб. **13.069.** Через 4 год. **13.070.** 450 м³. **13.071.** 20. **13.072.** 100 км. **13.073.** 5 і 8 м або 19,5 і 22,5 м. **13.074.** Із 1,25 м. **13.075.** 46 і 40. **13.076.** 124 га; 35 ц з 1 га. **13.077.** 20 і 60 км. **13.078.** Швидкість автомобіля 100 або 80 км/год; швидкість катера 80 або 60 км/год. **13.079.** 56 км. **13.080.** 14 і 28 км/год. **13.081.** 48 км/год. **13.082.** 5 і 3 км/год. **13.083.** 60 км/год. **13.084.** 1 год. 40 хв. і 2 год. 5 хв. **13.085.** 3 год. 20 хв. **13.086.** 7. **13.087.** 5. **13.088.** A (40; 0), B (0; 30), P (16; 18). **13.089.** 415 км. **13.090.** 1,5 кг. **13.091.** 120 кг і 162 крб.; 180 кг і 252 крб. **13.092.** 950 крб.; 400, 250 і 300 крб. **13.093.** 3165 г; ≈ 79,1 %. **13.094.** 187,5 кг. **13.095.** 2,7 м. **13.096.** 30 і 60 км/год. **13.097.** 88 км/год. **13.098.** 4 і 16 км/год. **13.099.** $(-nr+\sqrt{nr(nr+s)})/(2n)$ і $(nr+\sqrt{nr(nr+s)})/(2n)$ км/год. **13.100.** 32. **13.101.** 84 км; 6 і 4 км/год. **13.102.** 21 і 12. **13.103.** 8 км; 4 км/год. **13.104.** 48 км/год. **13.105.** 48 хв; 25 км/год. **13.106.** 850 км/год. **13.107.** 45 і 30 днів. **13.108.** 10, 26 і 11,6 ц. **13.109.** 12 і 10,5 км/год. **13.110.** 4 і 8 год. **13.111.**

$(\sqrt{tm(4s+tm)}-tm)/(2t)$ км/год. **13.112.** Через 10 с. **13.113.** Через 17 хв. **13.114.** $a(3-\sqrt{5})/(4t)$ і $a(\sqrt{5}-1)(4t)$ км/год. **13.115.** 140 км. **13.116.** 80 км/год. **13.117.** 20 км/год. **13.118.** 32 і 36 км/год. **13.119.** 24. **13.120.** 75 км/год. **13.121.** $v = s(t_2+t_1)/(2t_2t_1)$ км/год; $v_в = s(t_2-t_1)/(2t_2t_1)$ км/год; $s_c = s(t_2-t_1)^2/(2t_2t_1)$ км. **13.122.** На середині шляху; 3 год. **13.123.** 40 км/год. **13.124.** 60 і 63 км/год. **13.125.** $s(a-b)/b$ і $s(a-b)/a$ км/год. **13.126.** 4 і 6. **13.127.** $\approx$ 11 м. **13.128.** $\sqrt{v(v-s)}$ км/год; при $v > s$. **13.129.** О 14 год. **13.130.** 5/12 км/год; 2 і 3 год. **13.131.** 5/6 км/год.; 5 год. **13.132.** На 56/3, 14 і 24 хв. **13.133.** За $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ і $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ хв. **13.134.** $(bn+\sqrt{b^2n^2+240\,abn})/(2b)$ і $(-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn})/(2b)$. **13.135.** 45 год. **13.136.** 3 км/год. **13.137.** За 6, 8 і 12 хв. **13.138.** За 14 і 11 днів. **13.139.** 64. **13.140.** 15 і 12. **13.141.** 85 714. **13.142.** За 132 і 110 хв. **13.143.** $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ днів; задача має розв'язок при $b > a$. **13.144.** 54. **13.145.** $(3a-c+\sqrt{9a^2+2ac+c^2})/2$ км/год. **13.146.** 8; 4; 2 або —6,4; 11,2; —19,6. **13.147.** 10 $\times$ 20 см. **13.148.** 3 см. **13.149.** —220 і 264. **13.150.** $3\cdot 3-4$. **13.151.** $\frac{l(a+b)}{2ab}$ і $\frac{l(a-b)}{2ab}$ м/с. **13.152.** 40 $\times$ 50 см. **13.153.** 149 і 100 м. **13.154.** 12 і 80 к. **13.155.** 120 крб. **13.156.** 4 км/год. **13.157.** 32. **13.158.** 85 кг. **13.159.** 2160 крб. **13.160.** 23. **13.161.** $(\sqrt{b^2k^2+400abk}-bk)/(2b)$. **13.162.** 1 крб; 900 кг. **13.163.** 21 і 20 ц. **13.164.** 2 крб. **13.165.** 20 і 120. **13.166.** 1632. **13.167.** 18 і 12 км/год. **13.168.** 2. **13.169.** 35 : 12. **13.170.** 24 і 27 га. **13.171.** 38, 31, 5, 7 і 9. **13.172.** 18 і 24. **13.173.** 71. **13.174.** 12 кг. **13.175.** 68/3 км/год. **13.176.** 540, 450 і 630 л. **13.177.** Десяти. **13.178.** 50 і 60 га. **13.179.** 3 сини і 2 дочки. **13.180.** 5/9 і 10/9. **13.181.** 9. **13.182.** 50, 150 і 200 г. **13.183.** 20 рядів по 25 стільців у кожному. **13.184.** 75 і 60. **13.185.** 24 і 30 г. **13.186.** 16. **13.187.** 40 днів; 25 %. **13.188.** $(-kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn})/(2k)$ і $(kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn})/(2k)$. **13.189.** $\pm$0,5. **13.190.** $\approx$ 85 г. **13.191.** 2 і 26 Н. **13.192.** 12, 8 і 7 л. **13.193.** Через 3 год 20 хв. **13.194.** 4 і 5 м. **13.195.** 96 м; за 14 год. **13.196.** 56 і 84 км/год. **13.197.** 6 і 10 хв. **13.198.** 280 і 175 %. **13.199.** 600 м. **13.200.** 90 і 135 крб. **13.201.** $(\sqrt{b^2+32a^2}-b+4a)/2$ і $(\sqrt{b^2+32a^2}+b+4a)/2$ м. **13.202.** 3 год. **13.203.** 2 і 5 км/год. **13.204.** 12 і 24 год. **13.205.** 37. **13.206.** 202. **13.207.** 65 і 100 км/год. **13.208.** 24. **13.209.** Через 4 хв. **13.210.** На 40 %. **13.211.** 842. **13.212.** $(ab+\sqrt{ab(ab+4n)})/2a)$. **13.213.** За 50 і 75 год. **13.214.** 4 : 1. **13.215.** Через 50 хв. **13.216.** 40 і 50 км/год. **13.217.** $(4b \pm 3at + \sqrt{16b^2+9a^2t^2})/(6t)$ км/год; $4b > 3at$. **13.218.** 16 і 52. **13.219.** $\approx$ 55 років. **13.220.** 3 км/год. **13.221.** 80 км. **13.222.** 80 км/год. **13.223.** 1 км/год. **13.224.** За 4 дні. **13.225.** Більше на 1 год. **13.226.** 16 і 10 год. **13.227.** 10 і 8 год. **13.228.** 12 і 15 год. **13.229.** 12, 8, 3, 2. **13.230.** 13 і 63. **13.231.** 5 і 11 %. **13.232.** 3 і 45 км/год. **13.233.** За 4 дні. **13.234.** 20 і 60 %. **13.235.** 2/3. **13.236.** На 20 дошках. **13.237.** Дописана цифра або 0, або 3, або 8; у першому випадку задумано число 2, у другому 3, у третьому 4. **13.238.** Із 16 пострілів 6 вдалих. **13.239.** 50. **13.242.** 60 і 90 м³. **13.243.** 120, 90 і 70 відер. **13.244.** Трохи не покриється. **13.245.** 62 м³. **13.246.** 1225 кругів на кожну фігуру. **13.247.** 300 кг.

13.248. 6,75 і 4,5 крб.; у кожному куску було по 5,6 м. **13.249.** 18. **13.250.** 24. **13.251.** 1 год $5\frac{5}{11}$ хв. **13.252.** За 56 с. **13.253.** 65 і 20 $м^3$. **13.254.** Через $\frac{45v_2(v_3-v_1)}{v_3(v_2-v_1)}$ хв. **13.255.** 22/15 м/с. **13.256.** $D=(L^2+H^2-Hd)/H$. **13.257.** 30 км/год. **13.258.** $b(n-1)/(a-c)$ км/год. **13.259.** 270 км. **13.260.** 60°. **13.261.** 6, 9 і 12 км/год; 42 км. **13.262.** Через 7 с після початку падіння першого тіла. **13.263.** 360 км. **13.264.** 3 м/с. **13.265.** $a+2\sqrt{(a^2+ab+b^2)}/3$. **13.266.** 500 м. **13.267.** 100 км/год. **13.268.** $vd/(a-b)$ м/с. **13.269.** 1 год 21 хв; 1 год 20 хв; 6 км. **13.270.** $\dfrac{60v_1v_2}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ t_1 & t_2\end{vmatrix}}$ км/год. **13.271.** 24 км. **13.272.** 45 км/год. **13.273.** Через 5 с; за 0,5 м до лінії поля. **13.274.** 100 км/год. **13.275.** 8 год 15 хв; 8 год 53 хв; 9 год 16 хв; 10 год 1 хв. **13.276.** 12, 40 і 50 км. **13.277.** 1375 км. **13.278.** 50 км/год. **13.279.** $2ab/(a+b)$; $2ab/(3b-a)$; $2ab/(a+b)$; $2ab/(3a-b)$ м/хв, де $b/3<a<3b$. **13.280.** За 58,5 хв. **13.281.** $(a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2})/4$ км/год. **13.282.** $(v+\sqrt{9v^2+6sv})/v$ год. **13.283.** Спочатку обидва йшли з однаковою швидкістю 3 км/год. **13.284.** 75,6 км/год; 147 м. **13.285.** 24 хв. **13.286.** $AB=\frac{3c\beta}{4}$ км; $BC=\frac{\beta c(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$ км. **13.287.** $2a$. **13.288.** За 24 год. **13.289.** 170 кг. **13.290.** 4 і 6 год. **13.291.** 20, 30 і 24 год. **13.292.** За 15 і 7,5 днів. **13.293.** За 6 і 8 год. **13.294.** $0{,}4an/(11-n)$; $0{,}24an/(n-9)$; $n=10$. **13.295.** За $(a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2})/(2a)$ год. **13.296.** За 20 і 30 год. **13.297.** $(c+\sqrt{c^2+120bc})/2$ і $(-c+\sqrt{c^2+120bc})/2$ км/год. **13.298.** 1/80 і 1/90. **13.299.** 12 або 60°. **13.300.** 12 і 3 м/с; 360 м. **13.301.** 10, 20 і 30 зубців. **13.302.** 3 і 4 м/с. **13.303.** 300 і 600. **13.304.** 20 і 30. **13.305.** 42 і 35. **13.306.** 196 км; 84 км/год. **13.307.** 964. **13.308.** 15 або 95. **13.309.** 9 і 10 г. **13.310.** 40 і 100 т. **13.311.** 100 і 60 км/год. **13.312.** За 14,4 год. **13.313.** 4/15. **13.314.** 9 і 2. **13.315.** 20 %. **13.316.** $\approx$ 41,4 %. **13.317.** 3 год 40 хв і 2 год. 12 хв. **13.318.** 27,75. **13.319.** 2 л. **13.320.** 5. **13.321.** 824 і 428. **13.322.** $\approx$ 2,77 кг. **13.323.** 35 і 45 кг. **13.324.** 116 крб. **13.325.** 5. **13.326.** 30 км/год. **13.327.** 13, 7 і 4 л. **13.328.** 100 ц. **13.329.** $a(\sqrt{s}+\sqrt{r})/(\sqrt{s}-\sqrt{r})$ днів, де $s>r$. **13.330.** 10 і 15 год або по 12 год **13.331.** 25 кульок і 16 кілець або 16 кульок і 25 кілець. **13.332.** 200 і 140 год. **13.333.** Після 5 ударів. **13.334.** 45, 36 і 30 м. **13.335.** 53. **13.336.** 28 червня. **13.337.** Через 15 робочих днів, або 17 червня. **13.338.** 285 714. **13.339.** $a+b-c$. **13.340.** 3. **13.341.** На першому місці — третій робітник, на другому — другий, на третьому — перший. Кількості виробленої ними продукції відносяться, як 5 : 4 : 3. **13.342.** Що вийшов із B. **13.343.** $p=5a$; $q=5$. **13.344.** 3 : 4 : 5. **13.345.** Через $43\frac{7}{11}$ хв. **13.346.** 1. **13.347.** 12 і 1232. **13.348.** $(a+2b+\sqrt{a^2+4bc})/2$ і $(2c-a+\sqrt{a^2+4bc})/2$ год. **13.349.** 4 км. **13.350.** У $(\sqrt{5}+1)/2$ разів. **13.351.** а) 3 км/год; б) 4 км/год; в) 5 км/год. **13.352.** Через 88 с. **13.353.** 159 і 234. **13.354.** 31 і 41. **13.355.** 60 км/год. **13.356.** 105 м. **13.357.** 16 км/год. **13.358.** 142 857. **13.359.** 21 і 10. **13.360.** $0<v\leqslant 20$ км/год. **13.361.** 14 червоних і 19 синіх. **13.362.** 9 і 35. **13.363.** $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$.

13.364. $\sqrt[k-1]{k}$. 13.365. 240 км. 13.366. $5 < v < 15$. 13.367. 180 крб. 13.368. 2,5 т. 13.369. 11 лип і 5 берез. 13.370. 12. 13.371. $1 \leqslant h \leqslant b$, де $b \approx 1{,}4$ м. 13.372. 18. 13.373. 8 задач; 127,5 хв. 13.374. 16 год. 13.375. 421. 13.376. 211. 13.377. 421. 13.378. 2,4 і 4,8 кг. 13.379. $p(k \pm \sqrt{2k - k^2})/(2k)$ каратів, $k \leqslant 2$; найбільша втрата вартості у 2 рази. 13.380. $(25 - a \pm \sqrt{D})/(2a)$ і $(25 + a \pm \sqrt{D})/(2a)$ кг, де $D = a^2 - 130a + 625$, причому якщо $a > 5$ — немає розв'язків, якщо $0 < a < 5$ — два розв'язки, якщо $a = 5$ — один розв'язок (2 і 3 кг). 13.381. Якщо $s \geqslant pq/(100r)$, то на відстані від B, не більшій ніж $s/2 - pq/(200r)$. Якщо ж $s < pq/(100r)$, то для будь-якого пункту, розташованого на шляху AB, вигідніше брати вугілля у пункті A. 13.382. $R \pm \sqrt{2a^2 - 3R^2}$; $3R^2/2 \leqslant a^2 < 2R^2$. 13.383. 20; 6 год. 13.384. За 3 год. 13.385. Якщо $c < h/m$, то перша модель; якщо $c > h/m$, то друга модель; якщо $c = h/m$, то однаково. 13.386. $a(3 \pm \sqrt{3(4m - 1)})/6$; $1/4 \leqslant m < 1$. 13.387. $a + a\sqrt{2}$ год. 13.388. $\frac{100s - r(50 + s)}{(3s - r)a}$ і $\frac{100s - r(50 + s)}{(r - s)a}$ м/с, де $s < r < \frac{100s}{50 + s}$. 13.389. У 2 рази. 13.390. $5 + 5\sqrt{2}$; ≈ 12 км. 13.391. О 10 год 29 хв. 13.392. 6,4 км. 13.393. $\frac{d(k-1)}{2Tk} \pm \frac{d}{2t}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{t^2(k-1}{T^2k^2}}\right)^2$. 13.394. 1 год. 13.395. Через 4 хв; у 3 рази. 13.396. $\frac{3(-a + \sqrt{a^2 + 240a})}{2a}$ і $\frac{-3(3a - \sqrt{a^2 + 240a})}{2a}$ год, де $a < 30$. 13.397. $(4p - 2q)/t$ і $2p/t$ км/год.; $3p - q$ км, де $0 \leqslant q < 2p$, $p > 0$, $t > 0$. 13.398. 60 км/год. 13.399. 10 год. 13.400. 340 км. 13.401. $\frac{s(-a + \sqrt{a^2 + 240at})}{120t}$ м. 13.402. 500, 1000 і 1500 л. 13.403. Третя. 13.404. 120. 13.405. 8 км. 13.406. За 80 с. 13.407. $31b/(130v)$ год. 13.408. 11 і 7 см/с. 13.409. Від 2,5 до 3 км/с. 13.410. 1 і 4 см/с. 13.411. $(vt + \sqrt{2a^2 - v^2t^2})/(2v)$; $a = vt/\sqrt{2}$. 13.412. $0 < a < 68$. При $a = 5$ відстань між господарствами 60, 40 і 25 км. 13.413. 40, 50 і 10 %. 13.414. $(\sqrt{b^2c^2 + 4abc} - bc)/(2c)$ км; a, b, c — довільні додатні числа. 13.415. 10 і 15 год. 13.416. 6400 і 600 л. 13.417. Через $(av_1 + bv_2)/(v_1^2 + v_2^2)$ хв від початку польоту. 13.418. $2ak$ км. 13.419. 36 і 54 км/год. 13.420. $(3m + \sqrt{9m^2 + 2500t^2v^2})/(50t)$ км/год. 13.421. 53. 13.422. За $b + \sqrt{b(b - a)}$ днів. 13.423. 21; 6 год. 13.424. $a + \frac{-(a + b) + \sqrt{(a - b)^2 + 4abc^2}}{2(c + 1)}$; $b + \frac{-(a + b) + \sqrt{(a - b)^2 + 4abc^2}}{2(c + 1)}$; $\frac{-c(a + b) + c\sqrt{(a - b^2) + 4abc^2}}{2(c + 1)}$; $c > 1$. 13.425. У першій $\frac{an(n - 2)}{(n - 1)^2}$ см^3; у другій $\frac{a(n^2 - 2n + 2)}{(n - 1)^2}$ см^3; у всіх інших по a см^3. 13.426. За 4 і 12 год. 13.427. За 96 або за 5 хв. 13.428. У 4 рази. 13.429. $(3a + 2c + \sqrt{4c^2 - 4ac + 9a^2})/4$ км/год. 13.430. У 10 разів. 13.432. Через $ab/\sqrt{a^2 + 4ab}$ с. 13.433. $1000(2{,}5a + sp)/(2000 - sn)$ крб. Задача має розв'язок при $sn < 2000$. 13.435. 423. 13.436. 7,7 год. 13.437.

На 11. **13.438.** 4 г/см³. **13.439.** 77 або 86. **13.440.** $M_1(a\sqrt{3}-a; 0)$, $P_1(0; a\sqrt{3}-a)$; $M_2(-a\sqrt{3}-a; 0)$, $P_2(0; -a\sqrt{3}-a)$. **13.441.** $l(3k+1)/(k+3)$ м. **13.442.** 300 і 150 крб. **13.443.** $p(n+1)/(n-1)$; 1/3. **13.444.** 3; 4; 5. **13.445.** $r_1=(-r+\sqrt{6R^2-3r^2})/2$; $r<r_1\leqslant R$ при $(\sqrt{3}-1)/2\leqslant r/R<\sqrt{2}/2$; $r_1<r<R$ при $\sqrt{2}/2<r/R\leqslant 1$. **13.446.** $(24+s-\sqrt{s^2+288})/2$ і $(24-s-\sqrt{s^2+288})/2$ км; $s<6$. **13.447.** 22 см². **13.448.** 70 км/год. **13.449.** 121. **13.450.** 10 і 5 років.

Глава 14

14.001. 1/2, якщо $m>0$; $-1/2$, якщо $m<0$. **14.002.** $\sqrt[4]{b-a}$, де $b>a$. **14.003.** ctg 33°. **14.004.** $|\operatorname{tg}(\alpha/2)|$. **14.005.** $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$. **14.006.** 1/3. **14.007.** 35. **14.008.** 0; $-1/3$. **14.009.** 2. **14.010.** $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; $-1/\sqrt{10}$; $1/\sqrt{10}$. **14.011.** 64. **14.012.** $2^{-\sqrt{6}/2}$; $2^{\sqrt{6}/2}$. **14.013.** 4,5; 6. **14.014.** 10^{-6}; 10^3. **14.015.** $\sqrt{26}$. **14.016.** 3; $1/\sqrt[4]{3}$. **14.017.** 6; 1/6. **14.018.** 5. **14.019.** 1/16; 4. **14.020.** 3. **14.021.** 0,01; 100. **14.022.** 2. **14.023.** 1. **14.024.** $\pi n/2$; $n\in\mathbf{Z}$. **14.025.** $\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.026.** $(-1)^n\arcsin(\pi/4)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.027.** (3; 2). **14.028.** (2; 1); (−2; −1). **14.029.** (0; 2); (2; 0). **14.030.** $(1/2; \sqrt{2}/5)$. **14.031.** (1; 1); (4; 2). **14.032.** $(2^{\sqrt[3]{4}}; 2^{2\sqrt[3]{2}})$. **14.033.** 6. **14.034.** При $p=\pm 12$. **14.035.** 117. **14.036.** Ні. **14.037.** Один. **14.039.** −2; −1; 3. **14.040.** 2. **14.042.** Три. **14.044.** Чотири. **14.045.** $-(3+\sqrt{16m-7})/4$; $(-3+\sqrt{16m-7})/4$ при $m\geqslant 7/16$; $x_1=x_2=-3/4$ при $m=7/16$. **14.046.** 55. **14.047.** −2/3; 1. **14.048.** 1. **14.049.** 0. **14.051.** Ні. **14.053.** Немає розв'язків при $m=3$; безліч розв'язків при $m=-3$. **14.054.** Мінус. **14.055.** Мінус. **14.056.** Мінус. **14.057.** $a^{1/a}$, де $a>0$, $a\neq 1$. **14.058.** 12,5. **14.059.** 4. **14.060.** 3. **14.061.** $-(1+2a)/a$. **14.062.** $1/a^2$. **14.063.** $(b+3a-2)/(2a)$. **14.064.** 0. **14.065.** 0. **14.066.** 0. **14.067.** 0. **14.068.** 0,3010. **14.069.** $2(2+m)/(2-m)$. **14.070.** Мінус. **14.071.** Плюс. **14.073.** Виконується при $a=b/(b-1)$, де $b>1$. **14.076.** $[-2; 1]\cup[2; \infty)$. **14.077.** $(-3; 0)\cup(2; \infty)$. **14.078.** $(-4; 0)\cup(0; 4)$. **14.079.** $(-1; 1)\cup(2; \infty)$. **14.080.** $(-\infty; -3)\cup(-1; 1)\cup(3; \infty)$. **14.081.** $(-3; -2)\cup(2; 3)$. **14.082.** $(-\infty; -2/7]\cup(3; \infty)$. **14.083.** (2; 3). **14.084.** $(2; 4)\cup(4; 6)$. **14.085.** $(0; \infty)$. **14.086.** $(-2; 0)\cup(2; \infty)$. **14.087.** $(-2; 1)\cup(3; \infty)$. **14.088.** $(-3; -2)\cup(0; 1)$. **14.089.** (−3; 2). **14.090.** $(0; 1)\cup(100; \infty)$. **14.091.** (0; 1). **14.092.** (1/3; 3). **14.093.** $(0; 1/2)\cup[\sqrt{2}; \infty)$. **14.094.** (0; 0,04]. **14.095.** $(1; \sqrt{3})$. **14.096.** (−2; 2). **14.097.** [1/3; 3/4). **14.098.** (0; 1). **14.099.** $[2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.100.** $(\pi/12+\pi n; 5\pi/12+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.101.** а) $(2\pi n-7\pi/6; 2\pi n+\pi/6)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $(\pi n-\pi/6; \pi n+\pi/6)$, $n\in\mathbf{Z}$. **14.104.** (0; 1). **14.105.** $3^{400}>4^{300}$. **14.106.** (−1/3; 4). **14.107.** (1,2; 2). **14.108.** $[-3; -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2}; 3]$. **14.135.** Ні. **14.137.** $-b$. **14.142.** $[2; 3)\cup(3; 4]$. **14.143.** $(-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \infty)$. **14.144.** (−3; −2/3]. **14.145.** (0; 1). **14.146.** $(-\infty; 0]$. **14.147.** (0; 1). **14.148.** $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **14.149.** [0; 2]. **14.150.** [−13; 13]. **14.161.** $y_{\min}=2$. **14.162.** $y_{\min}=4$. **14.163.** $y_{\max}=2$. **14.166.** $1/n$. **14.167.** $(n+3)/(n+1)$. **14.168.** $(n+2)/(n+1)$. **14.169.** $1/(n+2)$. **14.171.** Ні; так. **14.173.** 1/2. **14.174.** а) і б) Зростаюча; в) не монотонна; г) спадна. **14.175.** −6; −5; −4; −2; −1; 0. **14.177.** Ні. **14.179.** 66. **14.180.** $n(m+1)/(n+1)$. **14.184.** 32 %. **14.185.** 1000^9. **14.186.** 4,56. **14.188.** $(2\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{2}+2+\sqrt[6]{32}+$

$+\sqrt[3]{4})/2$. **14.189.** а) $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3} 0{,}5$. **14.190.** 31. **14.192.** $2^{14} + 2^{12} + \ldots + 2^2 + 2^0$. **14.193.** 1,875 год. **14.194.** 7,5 год. **14.195.** а) $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbf{N}$; б) ні. **14.196.** $a - b$. **14.198.** $(x^2 + 2x + 2) \times (x^2 - 2x + 2)$. **14.199.** $0{,}5\,(2a^2 \pm \sqrt{2\,(a^4 + b^4)})$. **14.200.** $(x^4 + \sqrt{2}\,x^2y^2 + y^4)\,(x^4 - \sqrt{2}\,x^2y^2 + y^4)$. **14.201.** $(a^2 + 2b^2 + 2ab) \times (a^2 + 2b^2 - 2ab)$. **14.202.** $y = -4x^2 - 6x + 1$. **14.203.** Множина чотирикутників із взаємно перпендикулярними діагоналями. **14.205.** $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. **14.208.** $(\sqrt{x} - \sqrt{y})\,(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$. **14.209.** $(2;\ 1 + \sqrt{12}/3]$. **14.210.** Складеним. **14.215.** Ні. **14.216.** $(-5;\ 3)$. **14.222.** Ні. **14.227.** Так. **14.241.** $\lg^2 x + \lg^2 y = 1$. **14.242.** $\lg^{2/3} u + \lg^{2/3} v = 1$. **14.243.** $\pi/4 + \pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$. **14.244.** $\operatorname{arcctg} \dfrac{1-q}{p}$, де $1 < q < \dfrac{p^2}{4}$, $p < 0$. **14.245.** $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **14.249.** $y > 1$ при $k = 0$; $y \geqslant 1$ при $k = 1$; $y = 1$ при $k = 2$; $0 < y \leqslant 1$ при $k = 3$. **14.251.** $\sin^2 6° = 0{,}5\,(1 - \sqrt{1 - \sin^2 12°})$. **14.252.** а) Ні; б) ні. **14.253.** Так. **14.254.** а) 6π; б) 30π. **14.255.** $\pi/3$. **14.257.** $-2\sqrt{5}/5$. **14.259.** При $\alpha + \beta = 2\pi n$, або при $\alpha = 2\pi n$ і при будь-якому β, або при $\beta = 2\pi n$ і будь-якому α ($n \in \mathbf{Z}$). **14.260.** $y_{\max} = 3/4$. **14.261.** $y_{\max} = \sin 1$. **14.262.** $y_{\min} = 2$; $y_{\max} = 3$. **14.263.** $\operatorname{tg} 1$. **14.264.** $(m - 1)/(m + 1)$ при $m \neq 1$, $m \neq -1$. **14.265.** $-23/36$. **14.266.** Мінус. **14.267.** $\pi/4$. **14.268.** $\pi/4$. **14.269.** $m = -1/4$, $M = 1/4$. **14.271.** $(3;\ 1)$. **14.272.** Ні. **14.273.** а) «$<$»; б) «$<$»; в) «$>$»; г) «$<$». **14.302.** $-7/24$. **14.303.** $-\sqrt{3}/2$. **14.304.** $(3 + 8\sqrt{2})/15$. **14.306.** $\sqrt[512]{a^{511}}$. **14.309.** Ні. **14.310.** $y = x$, де $x > 0$, $x \neq 1$. **14.311.** 0, $[\pi/3;\ \pi/2]$. **14.313.** $[-6;\ -5] \cup [0;\ 1]$. **14.316.** Область визначення $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$; область значень $(-\infty;\ 0]$. **14.317.** $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.318.** При жодних x. **14.319.** $y_{\min} = 2$ при $1 \leqslant x \leqslant 3$. **14.320.** Скоротний тоді і тільки тоді, коли числа $a + b$ і $a - b$ або окремо діляться на 4, або мають найбільший спільний дільник $k > 2$. **14.321.** Ні. **14.322.** $(a - 1)\,(a + 3)\,(a^2 + 3)$. **14.323.** $(0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. **14.324.** $(0;\ \infty)$. **14.327.** $(-\infty;\ \infty)$. **14.328.** $1/(b_1^{-1} + b_2^{-1} + \ldots + b_k^{-1})$. **14.329.** а) $9 \cdot 10^n$; б) 0. **14.330.** $x = a$, $y \neq b$ при $c = 0$; $(a + c;\ b + 1)$, $(a - c;\ b - 1)$ при $c \neq 0$. **14.331.** 2 кв. од. **14.332.** $y_{\max} = 1/10$. **14.333.** $(1/2;\ 2)$. **14.335.** Мінус. **14.336.** Ні. **14.337** $-31/11$; 3. **14.338.** $(2;\ 9)$. **14.339.** $(1;\ 2;\ 3)$. **14.340.** -1. **14.341.** $(k + 1)^3\,(k - 1)^2$. **14.342.** 0. **14.343.** $y_{\max} = 6$. **14.344.** $y_{\max} = 2$. **14.345.** 2, 4. **14.346.** $\pm\sqrt{2/3}$; $\pm\sqrt{2n + 2/3}$; $\pm\sqrt{2n - 2/3}$, $n \in \mathbf{N}$. **14.347.** $4n^2$, де $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 0$. **14.348.** $x = 0$ при $a \in \mathbf{R}$. **14.349.** 2. **14.350.** $1/(1 - 2^x)$. **14.353.** Ні. **14.354.** 2; $-2/9$. **14.355.** $(-\infty;\ -\sqrt{3}/3] \cup [\sqrt{3}/3;\ \infty)$. **14.356.** $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$. **14.357.** 2. **14.358.** $y_{\min} = 4$. **14.359.** а) Ні; б) так; в) ні. **14.361.** $(\sqrt{5} + 1)/4$. **14.362.** $x = 17$. **14.363.** -2; 1; 2. **14.364.** $(-1{,}25;\ -1) \cup (9;\ \infty)$. **14.365.** $[-9;\ -1] \cup [0;\ 1]$. **14.367.** $5\sqrt[3]{5}/3$. **14.368.** $a = 1$. **14.369.** $y = -2x^2 - x + 3$. **14.370.** $(0;\ 1)$. **14.371.** -1; 0; 1; 4; 5; 6. **14.372.** $[0;\ 3)$. **14.373.** $(-\infty;\ 2] \cup [6;\ \infty)$. **14.374.** $(-\infty;\ 2] \cup (4;\ 6) \cup [8;\ \infty)$. **14.375.** $(-\infty;\ -1) \cup [0;\ 1)$. **14.376.** $[-1;\ 0{,}11]$. **14.377.** $k = 7$. **14.378.** -3; -2; 0; 1. **14.379.** а) 1; б) ± 3; ± 2; ± 1; 0. **14.380.** $(-3;\ -5/3)$. **14.381.** $(-3/4;\ 0) \cup (3;\ \infty)$. **14.382.** $(0;\ 1)$. **14.383.** $(3;\ 4) \cup (5;\ \infty)$. **14.384.** $\pi n < x \leqslant$

$< \pi/6 + \pi n$; $\pi n - \pi/6 < x < \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.386.** 2; 3. **14.387.** (2; 1). **14.389.** $x = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$; $y_{\min} = 4$. **14.390.** $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **14.392.** (3; 6). **14.394.** $(-\sqrt{3}; 4)$, $(-1; 2)$, $(1; 2)$, $(\sqrt{3}; 4)$. **14.395.** $(-3; 57)$, $(2; 2)$. **14.396.** $(-\infty; -7]$. **14.397.** $k = 4$. **14.398.** $(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$, 0. **14.399.** $[1; 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}; 7]$. **14.400.** $[-1; 0) \cup (8; 9]$. **14.401.** $(-2; 0)$, $(2; 0)$. **14.402.** $(0; 25)$. **14.403.** (2; 4). **14.404.** 16. **14.405.** $(10^5; 0)$, $(10^{-1}; 0)$. **14.406.** 1; 2. **14.407.** $(-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup (0; 3) \cup [5; \infty)$. **14.408.** $(0; 0{,}5] \cup (1; 2]$. **14.409.** $(1/2; 1) \cup [3; \infty)$. **14.410.** $(1; 4]$.

Глава 15

15.001. -3. **15.002.** 4/5. **15.003.** 0. **15.004.** $-145/42$. **15.005.** -5. **15.006.** 1. **15.007.** 0,25. **15.008.** -1. **15.009.** 1,5. **15.010.** 4. **15.034.** e^{-1}. **15.035.** $(-\infty; 0) \cup (0; 2{,}5)$. **15.036.** $[-4; -3]$. **15.037.** 3; 4. **15.038.** 1. **15.039.** 4/9. **15.040.** 2/3. **15.041.** -2. **15.042.** 1/8. **15.043.** 1/8. **15.044.** -2. **15.045.** 0. **15.046.** $-0{,}5$. **15.047.** 1. **15.048.** 1/30. **15.049.** 39. **15.050.** 7/6. **15.051.** 1. **15.052.** $-0{,}5$. **15.053.** $3 \ln 2$. **15.054.** $3\sqrt{2}/8$. **15.055.** $0{,}5 \ln 2$. **15.056.** -3. **15.057.** -1. **15.058.** $2/\sqrt{\pi}$. **15.059.** 1. **15.060.** а) $f''(1) = 3 - 4\cos 2$, $f''(\pi) = 2\ln\pi - 1$; б) $f''(3) = 2/3 - (1/9)\sin 1$, $f''(\pi/2) = 4/\pi - 1/18$. **15.061.** $y'(0) < 0$. **15.062.** Спадає від 1,5 до 0,25. **15.063.** $y = x - e$. **15.064.** -8; 72. **15.065.** $[-8; 8]$. **15.066.** $y = 3x - \pi$. **15.068.** Зростає від 0 до ln 9. **15.069.** $[-1; 4]$ і $(-1; 4)$. **15.071.** $a = -1$, $b = 1$. **15.072.** 45°. **15.073.** $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = 2\pi k - 2\,\mathrm{arctg}\,(3/5)$, $k \in \mathbf{Z}$. **15.074.** $x_1 = 0$, $x_2 = -7/3$. **15.075.** Ні.

15.076. $F(x) = \begin{cases} x^2/2 + C & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x^2/2 + C & \text{при } x < 0. \end{cases}$ **15.077.** а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' + 0{,}36y = 0$. **15.078.** а) $y = Ce^{-36x}$; б) $y = A\cos(6x + \varphi)$. **15.083.** Перше — ні, друге — так. **15.084.** $a > 3$. **15.085.** $\dfrac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. **15.086.** $y = x + 1$. **15.087.** $(4; 0)$, $(1; -27)$.

15.089. $\pi/3$. **15.091.** $(3; -2)$, $(-1; 2/3)$. **15.092.** $(2; 8/3)$, $(3; 7/2)$. **15.093.** $3\pi/4$. **15.094.** $\pi/4$. **15.095.** $(1/2; -15/32)$. **15.096.** $y = (1/e)x$. **15.097.** У точці $(-5; 45)$: $y = -20x - 55$ і $y = -13x - 20$; у точці $(2; 3)$: $y = 8x - 13$ і $y = x + 1$. **15.098.** $\beta = \pi/2 + \mathrm{arctg}\,3$. **15.099.** $y = 4x - 13$; $y = -4x + 3$. **15.100.** $x + ey - 2e = 0$. **15.101.** $8x - y + 14 = 0$. **15.102.** $(1; 0)$; $(-1/3; -44/27)$. **15.103.** $(0; -1)$; $(4; 3)$. **15.104.** а) $y = x - 0{,}09$; б) $\pi/24$; $\pi/8$; $13\pi/24$; $5\pi/8$. **15.105.** а) $3\pi/4$; б) $7\pi/18$. **15.106.** $\pi/6$. **15.107.** $5\sqrt{5}$. **15.108.** 5 кв. од. **15.109.** $S_1 = S_2 = S_3 = 8$ кв. од. **15.112.** 1/13 м/с. **15.113.** 21 м/с; 24 м/с^2. **15.114.** 1 і 4 с. **15.115.** $v(2) = 70$ м/с. **15.116.** $v_1 = 8$ м/с, $v_2 = 10$ м/с і $v_1 = 24$ м/с, $v_2 = 22$ м/с. **15.117.** $a_1 = 14$ м/с^2, $a_2 = 18$ м/с^2. **15.118.** $v_1 = 36$ м/с. $v_2 = 35$ м/с. **15.119.** $v = -8$ м/с. **15.122.** 160π см^2/с; 800π см^3/с. **15.123.** $\omega = 12$ рад/с; $t = 2$ с. **15.124.** 30 г/см; 98 г/см. **15.126.** $a > 4$. **15.127.** $x = e$ — точка мінімуму. **15.128.** $x = 1/e$ — точка максимуму. **15.129.** $x = 0$ — точка мінімуму, $x = 2$ — точка максимуму. **15.130.** $x = 3$ — точка максимуму. **15.131.** $x = 0{,}5$ — точка мінімуму; $y_{\min} = 0{,}25 - \ln 2$. **15.132.** $x = \ln 2$ — точка максимуму; $\pi/4$. **15.133.** $x = \pi/4 + \pi k$ — точки мінімуму при $k = 2n + 1$ і точки максимуму при $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\pi/4$. **15.134.** $x = 0$ — точка мінімуму; $(-0{,}25; -0{,}25 - \ln 0{,}75)$. **15.135.** $x = -1$ —

точка максимуму; $x = 1$ — точка мінімуму; $y = 11{,}25x + 13$. **15.136.** $x = 0$ — точка максимуму; 0; 0; 9. **15.138.** $p > 1$. **15.141.** Зростає на $(2\pi n - \pi/3;\ 2\pi/3 + 2\pi n)$; спадає на $(2\pi/3 + 2\pi n;\ 5\pi/3 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **15.142.** Зростає на $(-\infty;\ -1/2)$; спадає на $(-1/2;\ \infty)$. **15.143.** Зростає на $(1;\ 3)$; спадає на $(-\infty;\ 1)$ і на $(3;\ \infty)$. **15.144.** Зростає на $(-6;\ 0)$ і на $(0;\ 2)$; спадає на $(-\infty;\ -6)$ і на $(2;\ \infty)$. **15.145.** Зростає на $(-\infty;\ 1)$ і на $(2;\ \infty)$; спадає на $(1;\ 2)$. **15.146.** $y_{найм} = -24$, $y_{найб} = 4$. **15.147.** $y_{найм} = 0$, $y_{найб} = 17$. **15.148.** $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 3$. **15.149.** $y_{найм} = -10/3$, $y_{найб} = -2$. **15.150.** $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 2{,}125$. **15.151.** $y_{найм} = 0$, $y_{найб} = 1$. **15.152.** $y_{найм} = 0$, $y_{найб} = 3\sqrt{3}/8$. **15.153.** а) $y_{найм} = 0{,}8$, $y_{найб} = 1$; б) $y_{найм} = 1/\sqrt{5}$, $y_{найб} = 2/3$. **15.154.** $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = \pi/2$. **15.155.** $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 2\sqrt{3}/3$. **15.156.** $y_{найм} = 0{,}5$, $y_{найб} = 3/4$. **15.157.** $y_{найм} = -\pi/4$, $y_{найб} = \pi/4$. **15.158.** а) $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 1{,}25$; б) $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 1{,}25$. **15.159.** а) $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = \sqrt[3]{4/3}$; б) $y_{найм} = \sqrt[3]{9}/2$, $y_{найб} = \sqrt[3]{9/5}$. **15.160.** а) $y_{найм} = -1{,}5$, $y_{найб} = 7$; б) $y_{найм} = 2{,}5$, $y_{найб} = 9$. **15.161.** а) $y_{найм} = 5$, $y_{найб} = 12$; б) $y_{найм} = -1/64$, $y_{найб} = 0$. **15.162.** а) $y_{найм} = 2$, $y_{найб} = 16$; б) $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 2$. **15.163.** а) $y_{найм} = 3$, $y_{найб} = 5$; б) $y_{найм} = 1$, $y_{найб} = 5$. **15.164.** $y_{найм} = 2$, $y_{найб} = 2e^2 - 1$. **15.165.** $2^{1/2} \times 3^{-3/4}$. **15.166.** Зростає на $(-\infty;\ -1)$ і на $(1;\ \infty)$; спадає на $(-1;\ 0)$ і на $(0;\ 1)$; $f(x_1) < f(x_2)$. **15.167.** Зростає на $(1;\ \infty)$; спадає на $(0;\ 1)$; $f(e^{-2}) > f(e^{-1})$. **15.168.** 3. **15.169.** $f(0) = 2$. **15.170.** $(e;\ \infty)$; $\pi^e < e^\pi$. **15.171.** $y_{max} = 0{,}25$ при $x = \ln 2$; зростає на $(-\infty;\ \ln 2)$; спадає на $(\ln 2;\ \infty)$. **15.172.** $y_{min} = 0$ при $x = 0$, $y_{max} = 4e^{-2}$ при $x = 2$; зростає на $(0;\ 2)$; спадає на $(-\infty;\ 0)$ і на $(2;\ \infty)$. **15.173.** $y_{max} = \sqrt{2}/(2e^{\pi/4})$ при $x = \pi/4$; зростає на $(0;\ \pi/4)$; спадає на $(\pi/4;\ \pi)$. **15.174.** $y_{max} = \ln 2 - 0{,}5$ при $x = -0{,}5$; зростає на $(-\infty;\ -0{,}5)$; спадає на $(-0{,}5;\ 0{,}5)$. **15.175.** $y_{min} = -25/96$ при $x = 7/11$; зростає на $(7/11;\ 5)$; спадає на $(-\infty;\ 7/11)$ і на $(5;\ \infty)$. **15.176.** 9 і 9. **15.177.** 40; 60; 80. **15.178.** 0,5. **15.179.** 14×21 м. **15.180.** 18 дм^3. **15.181.** 12 і $3\sqrt{3}$ см. **15.182.** Дві сторони паралелограма — середні лінії даного трикутника. **15.183.** Прямокутний трикутник з катетом a. **15.184.** 100 см. **15.185.** 12 і 9 см. **15.186.** 12 і 9 см. **15.187.** 6 км/год. **15.188.** 9 і 7,5 см. **15.189.** $2R = 14\sqrt{2}$ см. **15.190.** 60°. **15.191.** $\angle BAC_{найб} = \pi/6$ при $\alpha = 2\pi/3$. **15.192.** 4/5. **15.193.** При $\alpha = \pi/3$ найбільше значення дорівнює 0,5. **15.194.** $H = R = \sqrt[3]{V/\pi}$. **15.195.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.196.** $a/2$; $H/2$. **15.197.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$. **15.198.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.199.** $\pi/3$. **15.200.** $\pi/4$. **15.201.** $k = 29{,}28$; $x \approx 5{,}4$; $y \approx 5{,}4$. **15.202.** $R = r$. **15.203.** $x = -1$ — точка максимуму, $x = 0$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty;\ -1)$ і на $(0;\ \infty)$; спадає на $(-1;\ 0)$. **15.204.** $x = \pm 2$ — точка мінімуму, $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-2;\ 0)$ і на $(2;\ \infty)$; спадає на $(-\infty;\ -2)$ і на $(0;\ 2)$. **15.205.** $x = \pm\sqrt{5}$ — точки мінімуму, $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-\sqrt{5};\ 0)$ і на $(\sqrt{5};\ \infty)$; спадає на $(-\infty;\ -\sqrt{5})$ і на $(0;\ \sqrt{5})$. **15.206.** $x = -1$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму;

зростає на $(-\infty; -1)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-1; 2)$. **15.207.** $x = 0$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(0; 2)$. **15.208.** $x = 2$ — точка максимуму, $x = 3$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 2)$ і на $(3; \infty)$; спадає на $(2; 3)$. **15.209.** $x = \pm 1$ — точки максимуму, $x = 0$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; -1)$ і на $(0; 1)$; спадає на $(-1; 0)$ і на $(1; \infty)$. **15.210.** $x = \pm 2$ — точки мінімуму $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-2; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-\infty; -2)$ і на $(0; 2)$. **15.211.** $x = 0$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(0; 2)$. **15.212.** $x = 0$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; 0)$; спадає на $(0; \infty)$. **15.213.** $x = -1$ — точка мінімуму, $x = 1$ — точка максимуму; зростає на $(-1; 1)$; спадає на $(-\infty; -1)$ і на $(1; \infty)$. **15.214.** $x = 2$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 2)$; зростає на $(2; \infty)$. **15.215.** $x = \sqrt[3]{1/2}$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(0, \sqrt[3]{1/2})$; зростає на $(\sqrt[3]{1/2}; \infty)$. **15.216.** $x = 2$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(0; 2)$. **15.217.** $x = 0$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 0)$; зростає на $(0; \infty)$. **15.218.** $x = 2$ — точка мінімуму, $x = -2$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; -2)$ і на $(2; \infty)$; спадає на $(-2; 2)$. **15.219.** $x = 2$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 2)$; зростає на $(2; \infty)$. **15.220.** $x = 4$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; -8)$ і на $(-8; -4)$; спадає на $(-4; 0)$ і на $(0; \infty)$. **15.221.** Спадає на $(-\infty; -3)$, на $(-3; 3)$ і на $(3; \infty)$. **15.222.** $x = 1$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; 1)$; спадає на $(1; \infty)$. **15.223.** $x = 1/2$ — точка мінімуму; спадає на $(-\infty; 1/2)$; зростає на $(1/2; 2)$ і на $(2; \infty)$. **15.224.** $x = 2$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; -2)$ і на $(2; \infty)$; зростає на $(-2; 2)$. **15.225.** $x = 1 - \sqrt{3}$ — точка максимуму, $x = 1 + \sqrt{3}$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 1 - \sqrt{3})$ і на $(1 + \sqrt{3}; \infty)$; спадає на $(1 - \sqrt{3}; 1)$ і на $(1; 1 + \sqrt{3})$. **15.226.** $x = 0$ — точка мінімуму, $x = 2$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; \infty)$; зростає на $(0; 2)$. **15.227.** $x = -1$ — точка мінімуму, $x = 1$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; -1)$ і на $(1; \infty)$; зростає на $(-1; 1)$. **15.228.** $x = -\sqrt[3]{2}$ — точка мінімуму, $x = 0$ — точка максимуму; спадає на $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$, на $(0; 1)$ і на $(1; \infty)$; зростає на $(-\sqrt[3]{2}; 0)$. **15.229.** $x = 3$ — точка мінімуму; зростає на $(-\infty; 0)$ і на $(3; \infty)$; спадає на $(0; 3)$. **15.230.** $x = 2{,}5$ — точка максимуму; зростає на $(-\infty; 1)$ і на $(1; 2{,}5)$; спадає на $(2{,}5; 4)$ і на $(4; \infty)$. **15.232.** а) $\frac{4x^3}{3} - \frac{9}{x} - 35$; б) $\frac{x^4}{12} - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 7$. **15.233.** $F(x) = \frac{x^5 + 11}{5}$. **15.234.** $F(x) = \frac{3 - \cos 2x}{2}$. **15.235.** $F(x) = -\frac{\operatorname{ctg} 3x + 2}{3}$. **15.236.** $F(x) = -\frac{71x^3 + 8}{24x^3}$. **15.237.** $F(x) = x^4 - x^3 + 3$. **15.238.** $F(x) = \frac{2 \sin 4x - 9}{8}$. **15.239.** $S(x) = 7 - 4\sqrt{5 - x}$. **15.240.** $\pi/2$. **15.241.** $3\pi/4$. **15.242.** 3. **15.243.** $(\pi - 2)/4$. **15.244.** $9\sqrt{3}/2$. **15.245.** $\sqrt{3}/3$. **15.246.** 2. **15.247.** 1/2. **15.248.** 0. **15.249.** 1120,4. **15.250.** $-101{,}25$. **15.251.** 46/15. **15.252.** $(4 - \sqrt{2})/6$. **15.253.** 2. **15.254.** $0{,}5 \ln 2 - 1{,}5$. **15.255.** $3(\sqrt[3]{9} - 1)/4$. **15.256.** 1/8. **15.257.** $3\pi/8$. **15.258.** $3\pi/16$. **15.259.** 11/96. **15.260.** 1/8. **15.261.** 12. **15.262.** $-4/5$. **15.263.** 4/9. **15.264.** 3/5. **15.265.** $3{,}6\sqrt{10} \lg e \approx 4{,}94$. **15.266.** 11/4 кв. од. **15.267.** $\sqrt{2}$ кв. од.

15.268. 8/3 кв. од. 15.269. 5/12 кв. од. 15.270. 1/6 кв. од. 15.271. 3/10 кв. од. 15.272. 1,6 кв. од. 15.273. $12 - 5 \ln 5 \approx 4$ кв. од. 15.274. 64,5 м; 11 м/с². 15.275. 11,25 м; 1/12 м/с².

Глава 16

16.001. $\frac{n^2 + m^2}{n - m}$. 16.003. $\frac{c \sin 2\alpha}{2 \sin (\alpha + 45°)}$. 16.006. $-1/k$. 16.007. 20. 16.008. 12. 16.009. Частини рівновеликі. 16.010. $3R^2$. 16.014. У п'ятикутнику. 16.023. $4S$. 16.025. $R^2 (4\pi - 3\sqrt{3})/6$. 16.027. 0,2. 16.029. $[s/\sqrt{2}; s]$. 16.032. 3. 16.034. $0{,}2R\sqrt{10}$. 16.037. $4\sqrt{2}$ м. 16.038. a. 16.040. 4, 5, 6, 7 і 8 см. 16.041. 3 і 4. 16.044. 16 см. 16.045. 4 і 11 см. 16.046. 12 см. 16.047. 12, 15 і 18 см. 16.048. 7,2 см². 16.049. $600\sqrt{3}$ см². 16.050. 1,5 см. 16.052. $4\frac{8}{21}$ і $5\frac{20}{21}$ см. 16.053. $c^2/4$. 16.054. а) Тупокутний; б) прямокутний; в) неможливий; г) тупокутний. 16.056. $(\sqrt{5} + 1) : 4$. 16.057. $2(S_1 + S_2)$. 16.060. $p/4$. 16.063. $h/3$. 16.064. 1,2 см. 16.065. 7 : 2. 16.067. 180°. 16.070. arccos (4/5). 16.073. a. 16.074. arccos (4/5). 16.075. 1) 5, 7, 9, 11 і 30 см; 2) 6, 8, 10, 12 і 30 см; 3) 7, 9, 11, 13 і 30 см. 16.076. 25. 16.077. 36 і 108°. 16.078. 2α; π; $2\pi - 2\alpha$. 16.081. Ні. 16.084. 60°. 16.085. arccos (1/3). 16.086. $\pi/4$; $\pi/2$; arctg 2. 16.087. 1 : 4. 16.088. 6/13. 16.089. $-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$. 16.090. $\frac{1}{2} H \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. 16.091. $l \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \times \sin^2\frac{\alpha}{2}$ і $l \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 16.093. $\pi/3$. 16.096. 51°. 16.097. $\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}$; $k \geqslant 2$. 16.098. $2 \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - \sqrt{2k - k^2}}{k - 1}}$; $1 < k < 2$. 16.099. $\pi\sqrt{3} : 2$. 16.100. 20. 16.105. $6\sqrt{435}$ см³. 16.106. 60°. 16.107. $a\sqrt{2}/2$. 16.114. 1 : 7. 16.115. 1 см. 16.116. $5\pi/16$. 16.117. На $(\sqrt{6} - \sqrt{5})/2$. 16.119. 1 : 11. 16.120. 5040 см². 16.121. $\sqrt{2S_1S_2S_3}/3$.

Глава 17

17.001. $y \pm 0{,}5\sqrt{15} = 0$. 17.002. D (—1, 4; —5,2). 17.003. $5x - y + 7 = 0$. 17.004. $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x$; $y = -\sqrt{3} \times (x - 10)$. 17.005. $(x - 7/2)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = 49/4$. 17.006. $y = -\sqrt{3}x + (3 + 2\sqrt{3})$; $6 + 3{,}5\sqrt{3}$ кв. од. 17.007. 13; B (12; 5); C (—5; 12); D (—12; —5). 17.008. $(x - 1/2)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9/4$ або $(x - 1/2)^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 9/4$. 17.009. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. 17.010. (—1; 2); 13 кв. од. 17.011. $8x + 15y \pm 60 = 0$ і $8x - 15y \pm 60 = 0$; 60/17 см. 17.012. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. 17.013. $4\sqrt{17}/11$; $y = 4x$. 17.014. C (5; 2); D (3; 3) або C (3; —2); D (1; —1). 17.015. 24/25. 17.016. $\sqrt{33}$ і $\sqrt{105}$. 17.017. $(-2 + 3\sqrt{3}; -1)$ або $(-2 - 3\sqrt{3}; -1)$; $9\sqrt{3}$ кв. од. 17.018. $4\sqrt{2}$. 17.019. (—2/3; —2/3). 17.020. C (4; —1). 17.021. $(3/2)\sqrt{34}$. 17.022. $3x + 4y - 15 = 0$ і $3x - 4y - 15 = 0$. 17.023. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$. 17.024. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$. 17.025. (1,5; 1; 1). 17.026. $\cos\alpha = 31/(5\sqrt{41})$. 17.027. $\cos A = -5/\sqrt{34}$.

17.028. $\alpha = -4$, $\beta = 2$ або $\alpha = -8$, $\beta = -2$. **17.031.** $\overline{M_1M_2}$ (1,5; 1; −0,5); $|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{7/2}$. **17.033.** $\overline{AB} = 3\bar{a} - \bar{b}$; $\overline{BC} = 2\bar{b} - 3\bar{a}$. **17.034.** $(-\infty; 0)$ і $(1; \infty)$. **17.035.** $(-\infty; -1)$ і $(0; 2)$. **17.036.** [2; 5). **17.037.** (2/3; 3). **17.038.** $x = -5/4$, $y = 8/5$. **17.039.** $(-\infty; -1)$ і $(5; \infty)$. **17.040.** $\overline{BD} = 2(\bar{b} - \bar{a})$; $\overline{AD} = (4/3)\bar{b} - (2/3)\bar{a}$. **17.041.** $\overline{AB} = (9/8)\bar{a} - (3/8)\bar{b}$; $\overline{AD} = (-3/8)\bar{a} + (9/8)\bar{b}$; $\overline{MN} = \bar{b} - \bar{a}$; $\overline{BD} = (-3/2)\bar{a} + (3/2)\bar{b}$. **17.042.** $\overline{CM} = (3/20)\overline{CA} + (3/20)\overline{CB} + (7/10)\overline{CD}$. **17.043.** arccos $(5\sqrt{13}/26)$. **17.046.** $\overline{A_1O} = -\bar{a} + (1/3)\bar{b} - (2/3)\bar{c}$. **17.047.** $8/(5\sqrt{17})$. **17.048.** arccos $(3/\sqrt{19})$. **17.049.** arccos (13/14). **17.050.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{a} + \bar{b})$. **17.051.** $\bar{p}$ (2; −1; 1). **17.052.** $\bar{a} = (-3/2)\bar{b} - 3\bar{c}$. **17.054.** 5 кв. од. **17.055.** 120°. **17.056.** $10\sqrt{5}/3$ куб. од. **17.057.** $\overline{CD} = \frac{CB^2 \cdot \overline{CA} + CA^2 \cdot \overline{CB}}{CA^2 + CB^2}$. **17.059.** $1/\sqrt{10}$. **17.060.** M (0; 0; 2/3); N (1/3; 1/3; 2/3). **17.061.** $\sqrt{13}$. **17.062.** −11,5. **17.063.** $4\sqrt{7}$. **17.064.** 120°. **17.065.** $7/(5\sqrt{33})$. **17.066.** 4. **17.067.** (−4; −2; 0) або (4; 2; 0). **17.068.** 6/7; −2/7; −3/7. **17.069.** π. **17.070.** 7. **17.071.** $\overline{A_1A_3} = 0{,}5(\sqrt{5} + 1)\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_5}$. **17.072.** При $x = 0$. **17.073.** $\overline{MO} = \frac{1}{2\cos^2(\alpha/2)}(\overline{MA} + \overline{MB})$. **17.074.** $\overline{DK} = (7/8)\overline{AB} - \overline{AD}$; $|\overline{DK}| : |\overline{AB}| = \sqrt{337}/24$. **17.077.** 4; 1/2. **17.078.** −29; 14 кв. од. **17.079.** 1 : 3. **17.080.** $\pi/4$. **17.081.** $\bar{0}$. **17.083.** Рівнобедрений гострокутний. **17.085.** 8. **17.086.** arccos (−4/5). **17.087.** $\overline{AB} + \overline{CB} = 2(\bar{a} - \bar{b})$. **17.089.** arccos (13/14). **17.090.** arccos $\frac{|a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. **17.091.** arccos $(1/\sqrt{14})$. **17.092.** −1,5. **17.095.** $\cos x = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ef}$, де $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|DA| = d$, $|DB| = e$, $|DC| = f$. **17.096.** $(1/\sqrt{11}; -3/\sqrt{11}; 1/\sqrt{11})$. **17.097.** $(a + b) : c$; $(b + c) : a$; $(c + a) : b$. **17.098.** $\sqrt{43}$. **17.099.** $\overline{OH} = \frac{b^2c^2\overline{OA} + a^2c^2\overline{OB} + a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$. **17.100.** $\pi/6$. **17.101.** 6. **17.102.** $\pm\sqrt{6}$. **17.103.** 12,5 куб. од. **17.104.** 5 кв. од. **17.105.** $\sqrt{442/19}$; тупим. **17.106.** (2; 3; −2). **17.107.** (−4; −6; 12). **17.108.** $AB = 5$; $S_{\triangle OAB} = 5$ кв. од.; $OM = 2{,}5$. **17.109.** $(4\sqrt{2}; -2; 8)$ або $(-4\sqrt{2}; 2; -8)$. **17.111.** $-S\sqrt{3}/6$. **17.112.** 3 : 1. **17.113.** $\overline{AB} = \overline{AC} + k\overline{AD}$, $\overline{AE} = \overline{AD} + k\overline{AC}$, де $k = (1 - \sqrt{5})/2$. **17.114.** $8a^2$, де a — довжина ребра куба. **17.115.** $3a^2$, де a — довжина сторони квадрата. **17.116.** $4a^2$, де a — довжина сторони квадрата. **17.119.** $13/(2\sqrt{43})$. **17.120.** $\frac{2bc}{b + c}\cos(\alpha/2)$. **17.125.** $\frac{16S^2c^2(c^4 - 16S^2)}{(16S^2 + c^4)^2}$. **17.127.** На рівні частини по 45°. **17.129.** 4 : 1.

Варіант I: **1.** 1. **2.** 4,3. **3.** 3. **4.** 4,1. **5.** 6. **6.** 0. **7.** 30°. **8.** 42 см. **9.** 3,53. **10.** —1,5.

Варіант II: **1.** 4. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 7. **6.** 41. **7.** 3. **8.** 64. **9.** 4. **10.** 1.

Варіант III: **1.** 8. **2.** 7. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 25. **6.** 2. **7.** 192. **8.** 5. **9.** 10. **10.** 3.

Варіант IV: **1.** 2. **2.** 1, 2 і 4. **3.** 2. **4.** 5. **5.** 6. **6.** 8. **7.** 0,5. **8.** 4 і 36. **9.** 8. **10.** 0 і 5.

Варіант V: **1.** 40. **2.** —25. **3.** 10. **4.** 1. **5.** 0,28. **6.** 90°. **7.** 72 $см^2$. **8.** 2,3 см. **9.** 13 і 13. **10.** 6.

Варіант VI: **1.** 1. **2.** 11. **3.** 0; 4. **4.** 48. **5.** 0,8. **6.** 4. **7.** 31,5. **8.** 15. **9.** 2. **10.** 18.

Варіант VII: **1.** —1,5. **2.** 8. **3.** 0,5. **4.** 6. **5.** 7,2. **6.** 16. **7.** 1. **8.** 190. **9.** —0,5. **10.** 7.

Варіант VIII: **1.** 2; 0,25. **2.** 225°; 315°. **3.** 4. **4.** 0,3. **5.** 168. **6.** 3 км/год. **7.** 1. **8.** 0,75. **9.** 6 і 0. **10.** 2,5.

Варіант IX: **1.** 2. **2.** 9. **3.** 10. **4.** 8 см. **5.** 0,8. **6.** 0. **7.** 103. **8.** 4 см. **9.** 6. **10.** 16 кв. од.

Варіант X: **1.** —9. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 11. **5.** —1. **6.** 7. **7.** 4. **8.** 0. **9.** Мінімум при $x = 1/e$. **10.** 2.

Варіант XI: **1.** 6. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 5. **5.** 0. **6.** —1. **7.** 5. **8.** Один раз. **9.** 20. **10.** 2,25.

Варіант XII: **1.** 1,5. **2.** 7,5 см. **3.** 0,6. **4.** 100. **5.** —1,5. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 2,25. **9.** 80. **10.** 1,5.

Варіант XIII: **1.** $(2x + 1)^2$. **2.** 2 tg 2α. **3.** 1. **4.** —10; 3. **5.** 9. **6.** 2. **7.** 10. **8.** 4. **9.** —3. **10.** 1.

Варіант XIV: **1.** 3. **2.** 1,6. **3.** 5. **4.** 12 і 24 год. **5.** —1, 1. **6.** 4. **7.** 12. **8.** 0,5. **9.** 8. **10.** 120°; 240°.

Варіант XV: **1.** —4; —3. **2.** 25. **3.** 5. **4.** —58. **5.** 2; 3. **6.** 2,25. **7.** 9,375 кв. од. **8.** 12. **9.** 150°; 210°. **10.** 40 л.

Варіант XVI: **1.** 2. **2.** 0,1. **3.** 83. **4.** 4. **5.** 192 кв. од. **6.** 90°; 210°. **7.** 32. **8.** 25 і 20. **9.** 2; 1; 5. **10.** 2; 4.

Варіант XVII: **1.** 4. **2.** 3/4. **3.** 5. **4.** 60 кв. од. **5.** 0,8. **6.** 10. **7.** 6. **8.** 6. **9.** 12 куб. од. **10.** 8.

Варіант XVIII: **1.** 5. **2.** 8. **3.** 4. **4.** 2. **5.** 66. **6.** 1. **7.** 12 куб. од. **8.** 13. **9.** 2. **10.** 3.

Варіант XIX: **1.** 4. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 7. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 6 кв. од. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 3.

Варіант XX: **1.** 7. **2.** 8 кв. од. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 0,6. **6.** 2. **7.** 51,6. **8.** 3. **9.** 16. **10.** 120°.

Варіант XXI: **1.** 4. **2.** 48 кв. од. **3.** 3. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 7. **7.** 10. **8.** 4. **9.** 5. **10.** 2.

Варіант XXII: **1.** $(2 \cdot \log_2 5 + 1)^2$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** 5. **5.** 12. **6.** 0,36. **7.** 0,8. **8.** 3. **9.** 6. **10.** 2.

Варіант XXIII: **1.** 4. **2.** 5. **3.** 9. кв. од. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 6. **10.** 4.

Варіант XXIV: **1.** 14. **2.** 0,5. **3.** 5. **4.** 7. **5.** 4. **6.** 250 куб. од. **7.** 63. **8.** 0,2. **9.** 5. **10.** 20.

Варіант XXV: **1.** 1. **2.** 16. **3.** 6. **4.** 0,28. **5.** (9; —1). **6.** 6. **7.** 3. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 4 кв. од.

Варіант XXVI: **1.** —2; —1. **2.** 0,5; 0,6. **3.** 0,75. **4.** 18 кв. од. **5.** 4. **6.** 3 і 0. **7.** 16. **8.** —2; —1. **9.** 120°; 240°. **10.** 12.

Варіант XXVII: **1.** 135°; 225°. **2.** 24 $см^2$. **3.** 2 і 22 134. **4.** —5 і 3. **5.** —5. **6.** 15. **7.** —1,5. **8.** 1,75. **9.** 2. **10.** 4.

Варіант XVIII: **1.** 20. **2.** —0,4. **3.** 1. **4.** —1, 2. **5.** 4. **6.** —6 і —6. **7.** —0,6. **8.** 0,4 і 0,4. **9.** 5 і 6. **10.** 39 і —39.