КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Економічний факультет

ІНСТИТУТ МЕНЕДЖМЕНТУ
ТА ФІНАНСІВ
при
Київському національному
університеті імені Тараса Шевченка

Навчально-методичний комплекс

з курсу

„Економетрика”

для студентів економічних спеціальностей
денної, очно-заочної та заочної форм навчання

Київ – 2004

Ставицький А.В.
Навчально-методичний комплекс з курсу „Економетрика”. – К., 2004. – 112 с.

Розглянуто та схвалено на зісіданні кафедри економічної кібернетики, протокол № 8 від 29 грудня 2003 р.

Схвалено Вченою радою економічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, протокол № 5 від 10 лютого 2004 року.

Схвалено Вченою радою Інституту менеджменту та фінансів при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, протокол № 7 від 26 лютого 2004 року.

Рецензенти: **О.А.Корольов,** д.е.н., професор кафедри статистики та економетрії Київського національного торгово-економічного університету;
О.І.Черняк, к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Зміст

Загальні положення

Економетричне моделювання широко застосовується в різноманітних економічних дослідженнях. Сьогодні економетрика переживає своє друге народження, що підтверджує вручення у 2003 році Нобелівської премії з економіки одним з найвідоміших вчених-економетристів Гренджеру та Інглу. Опанування курсу „Економетрика” надає студентам навички творчого мислення, формує здатність аналізувати економічні явища, знаходити взаємозв'язок між ними.

Мета вивчення дисципліни – ознайомлення студентів з методами досліджень, тобто методами перевірки, обґрунтування, оцінювання кількісних закономірностей та якісних тверджень (гіпотез) в мікро- та макроекономіці на основі аналізу статистичних даних. Знання, здобуті студентами під час вивчення економетрики, широко застосовуються в менеджменті, маркетингу, фінансовій справі тощо.

Завдання курсу полягають у наступному:

- опанування методів побудови та оцінювання економетричних моделей;
- набуття практичних навичок кількісного вимірювання взаємозв'язків між економічними показниками;
- визначення критеріїв для перевірки гіпотези щодо якостей економічних показників та форм їх зв'язку;
- поглиблення теоретичних знань в галузі математичного моделювання економічних процесів та явищ;
- використання результатів економетричного аналізу для прогнозування та прийняття обґрунтованих економічних рішень

Зв'язок з іншими навчальними дисциплінами. Базовими для курсу „Економетрика” є дисципліни економічного циклу, такі як „Економічна теорія”, „Мікроекономіка”, „Макроекономіка”. Математичною основою курсу є дисципліна „Теорія ймовірностей та математична статистика”. Знання, здобуті при вивченні „Економетрики” знаходять застосування при виконанні творчих індивідуальних завдань, курсових робіт та написанні дипломних проектів.

Форми проведення занять. Поєднання лекційних занять з лабораторними роботами в комп’ютерному класі.

Лекції націлені забезпечити теоретичне підґрунтя курсу, розкрити зміст основних методів аналізу економічної інформації.

Лабораторні заняття передбачають практичне застосування методів економетричного аналізу над економічними даними.

Форма контролю. Загальна оцінка виставляється за результатами виконання трьох контрольних робіт та роботи на семінарських заняттях. Перша контрольна робота (на комп'ютерах) перевіряє навички студентів в оцінці множинної регресії за методом найменших квадратів та інтерпретації результатів. Друга контрольна робота (теоретична) містить теоретичні питання та задачі по всьому курсу економетрики. Третя контрольна робота (на комп'ютерах) перевіряє здобуті навички студентів щодо побудови моделі по реальних даних, перевірки статистичних гіпотез.

Програма курсу

Вступ до курсу

Предмет і задачі навчальної дисципліни «Економетрика». Необхідність вивчення економетрики. Мета курсу. Зв'язок з іншими дисциплінами. Застосування економетричних досліджень в економіці.

Проста лінійна регресія

Структура моделі та основні припущення при її побудові. Оцінювання моделі. Метод найменших квадратів. Надійні інтервали оцінок. Числові критерії адекватності моделі. Коефіцієнт детермінації. Інші методи оцінювання моделі та їхнє практичне значення. Властивості параметрів моделі. Залишки моделі. Дисперсія моделі. Перевірка статистичних гіпотез. Гіпотеза про значимість одного з коефіцієнтів. Гіпотеза про лінійні обмеження коефіцієнтів. Перевірка моделі на адекватність. Перевірка моделі на наявність структурних розривів. Критерій дисперсійного аналізу. Критерій Чоу. Прогнозування за допомогою простої лінійної регресії. Моделі, які зводяться до моделі множинної лінійної регресії. Приклади застосування простої лінійної регресії.

Множинна регресія

Структура моделі та основні припущення при її побудові. Оцінювання моделі. Метод найменших квадратів. Надійні інтервали оцінок. Числові критерії адекватності моделі. Коефіцієнт детермінації. Скоригований коефіцієнт детермінації. Властивості параметрів моделі. Залишки моделі. Дисперсія моделі. Перевірка гіпотез. Гіпотеза про значимість одного з коефіцієнтів. Гіпотеза щодо системи лінійних обмежень. Перевірка моделі на адекватність. Перевірка моделі на наявність структурних розривів. Прогнозування за допомогою лінійної регресії. Моделі, що зводяться до моделі множинної лінійної регресії. Виділення сезонних коливань. Регресійні залежності довільного типу. Модель Коба-Дугласа. Приклади застосування множинної лінійної регресії. Інтерпретація коефіцієнтів регресії. Порівняння факторів за ступенем їх впливу. Економічний зміст коефіцієнтів регресії. Коефіцієнти еластичності.

Мультиколінеарність у регресії. Методи визначення мультколінеарності. Шляхи позбавлення мультиколінеарності. Приклади оцінювання регресії з мульколінеарними змінними.

Модель лінійної регресії з гетероскедастчними збуреннями

Модель лінійної регресії з гетероскедастичними збуреннями, її структура та основні припущення. Наслідки застосування МНК для оцінювання моделі. Виявлення гетероскедастичності. Критерій Голфелда-Квондта. Критерій Глейзера. Критерій Уайта. Оцінювання моделі. Зважений метод найменших квадратів у випадку відомої коваріаційної матриці збурень. Використання критеріїв Глейзера та Уайта для оцінювання моделі. Методи позбавлення гетероскедастичності. Приклад аналізу лінійної регресії з гетероскедастичними збуреннями.

Модель лінійної регресії з автокорельованими збуреннями

Структура моделі. Наслідки застосування МНК для оцінювання моделі. Виявлення автокореляції. Оцінювання моделі. Узагальнений метод найменших квадратів у випадку відомої кореляційної матриці збурень. Авторегресія першого порядку. Авторегресія другого порядку. Оцінювання моделі у випадку невідомої кореляційної матриці збурень. Методи позбавлення автокореляції. Приклад аналізу лінійної регресії з автокорельованими збуреннями.

Системи одночасних регресійних рівнянь

Структура моделі. Приклади систем одночасних регресійних рівнянь. Класифікація рівнянь та змінних. Структурний та зведений вигляд систем одночасних рівнянь. Ідентифікація систем одночасних рівнянь. Ідентифікація через зведений вигляд. Порядкова умова ідентифікації. Рангова умова ідентифікації. Оцінювання моделі. Непрямий метод найменших квадратів. Двоетапний метод найменших квадратів. Приклад застосування системи одночасних регресійних рівнянь.

Сучасні проблеми економетрики

Методи специфікації моделей. Використання стохастичних регресорів. Безумовне прогнозування за допомогою регресії. Умовне прогнозування за допомогою регресії. Метод максимальної правдоподібності. Використання оцінок максимальної правдоподібності. Перевірка гіпотез за допомогою функції правдоподібності. Моделі бінарного та множинного вибору. Перспективи економетрики.

Вступ до теорії часових рядів

Основні визначення. Порядок аналізу часових рядів. Адитивна та мультиплікативна моделі часових рядів. Міри точності прогнозів. Лаговий оператор. Стаціонарність часових рядів. Функція автокореляції. Стабільність моделі. Методи згладжування часових рядів. Класичні підходи: метод усереднення, подвійне усереднення, процентне диференціювання, процентна різниця). Методи експоненціального згладжування: звичайне, подвійне, потрійне. Несезонна модель Холта-Вінтера. Проблема дезагрегування часових рядів.

Тематичний план дисципліни

Назви розділів та тем	Кількість навчальних годин			
	Денна ф.н./оч.-заоч./заоч.ф.н.			
	Всього	Лекції	Лаборат. заняття	Самост. робота
Вступ до економетрики				
Предмет, цілі та задачі економетрики	3/10/10	2/2/1	–/–/–	1/8/9
Проста лінійна регресія				
Структура моделі та її оцінювання	4/10/10	2/2/1	1/1/1	1/7/8
Статистичні гіпотези в моделі простої лінійної регресії	5/10/10	2/2/1	1/1/1	2/7/8
Множинна лінійна регресія				
Структура моделі та її оцінювання	4/10/10	2/2/1	1/1/1	1/7/8
Перевірка статистичних гіпотез	6/14/14	2/2/1	2/2/1	2/10/12
Порівняння факторів за ступенем їх впливу	5/9/9	2/2/–	2/1/–	1/6/9
Фіктивні змінні та їх використання	6/10/10	2/2/1	2/2/–	2/6/9
Проблема мультиколінеарності	5/8/8	2/2/–	1/–/–	2/6/8
Модель лінійної регресії з гетероскедастичними збуреннями				
Структура моделі та методи її оцінки	4/–/–	2/–/–	1/–/–	1/–/–
Критерії визначення гетероскедастичності	5/–/–	2/–/–	1/–/–	2/–/–
Модель лінійної регресії з автокорельованими збуреннями				
Структура моделі та її основні припущення	4/–/–	2/–/–	1/–/–	1/–/–
Процеси авторегресії	4/–/–	2/–/–	–/–/–	2/–/–
Методи визначення автокореляції	4/–/–	2/–/–	1/–/–	1/–/–
Узагальнений метод найменших квадратів	6/–/–	2/–/–	2/–/–	2/–/–
Системи одночасних рівнянь				
Економічний зміст систем одночасних рівнянь	5/–/–	2/–/–	1/–/–	2/–/–
Методи оцінки систем одночасних рівнянь	5/–/–	2/–/–	1/–/–	2/–/–
Сучасні дослідження в економетриці				
Специфікація економетричних моделей	3/–/–	2/–/–	–/–/–	1/–/–
Вступ до теорії часових рядів				
Моделі часових рядів	3/–/–	2/–/–	–/–/–	1/–/–
	81/81/81	**36/16/6**	**18/8/4**	**27/57/71**

Тема 1. Проста лінійна регресія

Основні визначення та формули

Проста лінійна регресія.

Проста лінійна регресія – рівняння зв'язку двох змінних:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n},$$

де x_i - значення незалежної змінної,

y_i - значення залежної змінної.

Класичні властивості збурень.

1. $M\varepsilon_i = 0$
2. Гомоскедастичність збурень: $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2 = const, i = \overline{1,n}$.
3. Незалежність збурень: $\text{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0, i \neq j$.
4. Незалежність збурень та регресорів: $\text{cov}\left(\varepsilon_i, x_{ij}\right) = 0, \forall i, j$.
5. Збурення ε_i нормально розподілені для всіх *i*.

Оцінка регресії.

Оцінка регресії зводиться до знаходження її параметрів за **методом найменших квадратів (МНК)**:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 \to \min.$$

Можна також скористатися готовими формулами:

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},\ \hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}.$$

Вибіркова регресійна функція має вигляд: $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$.

Залишки моделі знаходяться за формулою: $e_i = \hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i, i = \overline{1,n}$.

Дисперсійний аналіз.

Формула розкладу дисперсії має вигляд

$$TSS = ESS + RSS,$$

де $TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ – загальна сума квадратів,

$ESS = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$ – пояснена сума квадратів,

$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ –сума квадратів залишків.

Статистичні властивості оцінок найменших квадратів.

$M\hat{\alpha} = \alpha$,

$M\hat{\beta} = \beta$,

$$\text{s.e.}\left(\hat{\beta}\right) = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}\right)},$$

$$\text{s.e}\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2},$$

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(\frac{-\overline{x}}{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}\right).$$

На практиці величину σ^2 замінюють її оцінкою $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{RSS}{n-2}$.

Теорема Гауса-Маркова.

Для простої лінійної регресії з гомоскедастичними, некорельованими збуреннями оцінки МНК мають найменшу дисперсію в класі всіх лінійних незміщених оцінок.

Коефіцієнт детермінації.

Коефіцієнт детермінації R^2 визначається як відношення поясненої і загальної сум квадратів:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

Коефіцієнт детермінації є частиною дисперсії залежної змінної, яка пояснюється за рахунок моделі, або, іншими словами, завдяки мінливості незалежної змінної. Коефіцієнт детермінації є мірою тісноти саме **лінійного** зв'язку між *x* та *y*. Коефіцієнт детермінації завжди знаходиться в межах від нуля до одиниці. Чим ближче R^2 до 1, тим точніше *x* пояснює *y*.

Коефіцієнт та індекс кореляції.

Тісноту зв'язку між змінними вивчає лінійний коефіцієнт парної кореляції $\left(-1 \le r_{xy} \le 1\right)$:

$$r_{xy} = \hat{\beta}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

та індекс кореляції

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma\left(y - \hat{y}\right)^2}{\Sigma\left(y - \overline{y}\right)^2}} \text{ – для нелінійної регресії } \left(0 \le \rho_{xy} \le 1\right).$$

Гіпотеза про адекватність моделі (F-тест).

$H_0 : \alpha = \beta = 0$.

Необхідно обрахувати практичне значення

$$F_{pr} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{1-R^2}{n-2}}$$

та порівняти його з теоретичною статистикою Фішера з 1 та *n*-2 степенями свободи і рівнем надійності $1-\alpha$:

$$F_{teor} = F\left(1, n-2, 1-\alpha\right).$$

Якщо $F_{pr} < F_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто регресія є статистично незначимою (неадекватною).

Гіпотеза про значення нахилу регресії.

$H_0 : \beta = m$.

Обраховується практичне значення:

$$t_{pr} = \left|\frac{\hat{\beta}-m}{s.e.\left(\hat{\beta}\right)}\right|$$

та порівнюється з теоретичною статистикою Стьюдента з *n-2* степенями свободи:

$$t_{teor} = t\left(n-2, 1-\alpha\right).$$

Якщо $t_{pr} < t_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто значення коефіцієнту β можна прийняти рівним m.

Аналогічно перевіряється гіпотеза про значення коефіцієнта α.

Частковим випадком гіпотези про значення нахилу регресії є гіпотеза про значимість коефіцієнта регресії.

Гіпотеза про значимість коефіцієнта регресії.

$H_0 : \beta = 0$.

Обраховується практичне значення:

$$t_{pr} = \left|\frac{\hat{\beta}}{s.e.\left(\hat{\beta}\right)}\right|$$

та порівнюється з теоретичною статистикою Стьюдента з *n-2* степенями свободи:

$$t_{teor} = t\left(n-2, 1-\alpha\right).$$

Якщо $t_{pr} < t_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто коефіцієнт β є значимим

Гіпотеза про значимість кореляції між змінними x та y.

$H_0 : r_{xy} = 0$.

Обраховується практичне значення:

$$t_{pr} = \left| \frac{\hat{r}_{xy}}{\sqrt{\frac{1-\hat{r}_{xy}^2}{n-2}}} \right|$$

та порівнюється з теоретичною статистикою Стьюдента з n-2 степенями свободи:

$$t_{teor} = t\left(n-2, 1-\alpha\right).$$

Якщо $t_{pr} < t_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто залежність між змінними x та y є статистично незначимою.

Надійні інтервали для коефіцієнтів регресії.

Надійний інтервал для коефіцієнта α: $[\hat{\alpha} - \mathbf{s.e.}(\hat{\alpha}) \cdot t_{\text{teor}}; \hat{\alpha} + \mathbf{s.e.}(\hat{\alpha}) \cdot t_{\text{teor}}]$;

надійний інтервал для коефіцієнта β: $[\hat{\beta} - \mathbf{s.e.}(\hat{\beta}) \cdot t_{\text{teor}}; \hat{\beta} + \mathbf{s.e.}(\hat{\beta}) \cdot t_{\text{teor}}]$,

де $t_{teor} = t\left(n-2, 1-\alpha\right)$.

Прогноз за регресією.

Нехай відоме наступне значення незалежної змінної x_{n+1}. Тоді прогноз обраховується за формулою:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_{n+1}.$$

Середня стандартна помилка прогнозу дорівнює:

$$\mathbf{s.e.}(\hat{y}_0) = \frac{RSS}{n-2} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}.$$

Надійний інтервал для прогнозу:

$$[\hat{y}_{n+1} - \mathbf{s.e.}(\hat{y}_{n+1}) \cdot t_{\text{teor}}; \hat{y}_{n+1} + \mathbf{s.e.}(\hat{y}_{n+1}) \cdot t_{\text{teor}}],$$

де $t_{teor} = t\left(n-2, 1-\alpha\right)$.

Середній коефіцієнт еластичності.

Середній коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків в середньому зміниться значення y при зміні незалежної змінної x на 1% від свого середнього значення:

$$\overline{E} = f'\left(x\right)\frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \hat{\beta}\frac{\overline{x}}{\overline{y}}.$$

Приклад розв'язання задачі

Приклад 1.

На основі статистичних даних доходу підприємства (у млн. грн.) y та кількості працюючих (у тис. чол.) x

y	x
10,8	2,53
11,9	3,54
12,4	3,84
13,2	3,84
14,1	4,22

y	x
15,2	4,81
16,0	6,53
17,4	5,82
18,6	6,43
19,4	7,73

y	x
20,5	8,19
21,3	7,65
22,5	9,31
23,7	9,26
25,0	9,86

1. Знайти оцінки параметрів лінійної регресії $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$.
2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 95%.
3. Визначити значимість коефіцієнту нахилу регресії з рівнем надійності 95%.
4. Оцінити значущість коефіцієнта кореляції з рівнем надійності 95%.
5. Визначити надійні інтервали для коефіцієнтів регресії з рівнем надійності 95%.
6. Обчислити середній коефіцієнт еластичності.

Розв'язок.

1. Заповнюємо таблицю:

	y	x	x^2	y^2	xy
	10,8	2,53	6,40	116,64	27,32
	11,9	3,54	12,53	141,61	42,13
	12,4	3,84	14,75	153,76	47,62
	13,2	3,84	14,75	174,24	50,69
	14,1	4,22	17,81	198,81	59,50
	15,2	4,81	23,14	231,04	73,11
	16,0	6,53	42,64	256,00	104,48
	17,4	5,82	33,87	302,76	101,27
	18,6	6,43	41,34	345,96	119,60
	19,4	7,73	59,75	376,36	149,96
	20,5	8,19	67,08	420,25	167,90
	21,3	7,65	58,52	453,69	162,95
	22,5	9,31	86,68	506,25	209,48
	23,7	9,26	85,75	561,69	219,46
	25,0	9,86	97,22	625,00	246,50
Сума	262,00	93,56	662,22	4864,06	1781,95

Параметри регресії знаходяться за формулами

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}; \ \hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}.$$

Тоді

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} = \frac{15 \cdot 1781,95 - 93,56 \cdot 262}{15 \cdot 662,22 - (93,56)^2} = 1,8787,$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} = \frac{\sum y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum x_i}{n} = \frac{262}{15} - 1,8787\frac{93,56}{15} = 5,7486.$$

Таким чином вибіркова регресійна функція записується у такому вигляді:

$\hat{y} = 5,7486 + 1,8787x$.

При збільшенні кількості працюючих на 1000 чоловік доход підприємства зростає на 1,8787 млн. грн.

$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
10,502	0,089	48,511	44,444
12,399	0,249	25,679	30,988
12,963	0,317	20,285	25,671
12,963	0,056	20,285	18,204
13,677	0,179	14,364	11,334
14,785	0,172	7,191	5,138
18,017	4,066	0,302	2,151
16,683	0,515	0,615	0,004
17,829	0,595	0,131	1,284
20,271	0,759	7,864	3,738
21,135	0,403	13,458	9,201
20,121	1,391	7,044	14,694
23,239	0,547	33,323	25,334
23,145	0,308	32,248	38,854
24,273	0,529	46,320	56,751
Сума	10,175	277,618	287,793

Таким чином, $RSS = 10,175$, $ESS = 277,618$, $TSS = 287,793$.

Коефіцієнт детермінації моделі становить $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{277,618}{287,793} = 0,965$, що свідчить про високу степінь залежності між змінними.

2. Перевіримо модель на адекватність. Практичне значення статистики Фішера дорівнює

$$F_{pr} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{1-R^2}{n-2}} = 354,71,$$

теоретичне $F_{teor} = F(1,13,0,95) = 4,7$, таким чином модель є адекватною.

3. Перевіримо гіпотезу $H_0 : \beta = 0$. Спочатку обрахуємо стандартне відхилення оцінки коефіцієнта $\hat{\beta}$

$$s.e.(\hat{\beta}) = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\right)} = \sqrt{\frac{RSS}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\right)} = 0,0998.$$

Практичне значення статистики Стьюдента дорівнює $t_{pr} = \left| \frac{\hat{\beta}}{s.e.\left(\hat{\beta}\right)} \right| = \frac{1,8787}{0,0998} = 18,8338$, теоретичне значення $t_{teor} = t\left(13;\ 0,95\right) = 2,16$, тобто гіпотеза повинна бути відхилена, а значить коефіцієнт β є значимим.

4. Розрахуємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \hat{\beta}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \hat{\beta}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} = 1,8787\frac{\sqrt{78,723}}{\sqrt{287,793}} = 0,98.$$

Для перевірки гіпотези про те, що коефіцієнт кореляції рівний 0, використовують статистики

$$t_{pr} = \left|r_{xy}\right|\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 18,745, t_{teor} = t\left(13, 0.95\right) = 2,16.$$

Оскільки практичне значення більше за теоретичне, то коефіцієнт кореляції не можна прийняти рівним 0, тобто він є значущим.

5. Визначимо надійні інтервали для коефіцієнтів з рівнем надійності 0,95 за формулою $[\hat{\beta} - \mathbf{s.e.}(\hat{\beta}) \cdot t_{\text{teor}}; \hat{\beta} + \mathbf{s.e.}(\hat{\beta}) \cdot t_{\text{teor}}]$, де $t_{teor} = t_{n-2;\ 0.95} = t_{13;0,95} = 2,16$:

$$4,316715 < \alpha < 7,180448;$$
$$1,663201 < \beta < 2,094201.$$

6. Середній коефіцієнт еластичності $\varepsilon = \hat{\beta}\frac{\overline{x}}{\overline{y}} = 1,8787\frac{93,56}{262} = 0,67$. При збільшенні кількості працюючих на 1% доход підприємства зросте на 0,67%.

Задачі

Група А

Задача 1.1. Знайти перетворення даних, яке зводить дану модель в лінійну. Визначити, яким чином потрібно включити збурення до моделі:

- $y = \dfrac{1}{\alpha + \beta \cdot e^x}$;
- $y = \dfrac{e^x}{\alpha + \beta \cdot e^x}$;
- $y = 1 + \alpha\left(1 - x^{\beta}\right)$;
- $y^2 = \alpha e^{\beta x}$.

Задача 1.2. Знайти невідомий коефіцієнт моделі $y_t = \alpha + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}$. Чому дорівнює коефіцієнт детермінації моделі? Знайти дисперсію моделі. Покажіть, що статистика $\dfrac{\hat{\alpha} - \alpha}{s.e.(\hat{\alpha})}$ має t_{n-1}-розподіл.

Задача 1.3. Знайти невідомий коефіцієнт моделі $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}$. Знайти коефіцієнт детермінації моделі.

Задача 1.4. Спостереження 16 пар $(x,\ y)$ дали результати: $\sum y^2 = 526$, $\sum x^2 = 657$, $\sum xy = 492$, $\sum y = 64$, $\sum x = 96$. Оцінити регресію $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$. Знайдіть коефіцієнт детермінації. Підрахуйте найкращий незміщений прогноз на наступний період, якщо x_{n+1}=4.

Задача 1.5. Для моделі $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$, $t = \overline{1, 20}$, відомо, що $\sum y_t = 15$, $\sum x_t = 41$, $\sum y_t^2 = 29$, $\sum x_t^2 = 214$, $\sum x_t y_t = 31$. Відомо, що $x_{21} = 10$. Обчислити найкращий лінійний незміщений прогноз величини $\hat{y}_{21}$. Оцінити стандартну похибку прогнозу.

Задача 1.6. Для спостережень

Y	5	13	12	17	12	22	15	22	33	35
X	90	25	42	50	36	35	12	60	25	32

обчисліть величину коефіцієнта детермінації R^2 в регресії Y_t на X_t при відсутності вільного члена. Проаналізуйте отриману регресію. Підрахуйте оцінку прогнозу при $x_{n+1} = 23$.

Задача 1.7. Для спостережень

Y	5	11	12	17	10	22	15	27	30	35
X	70	65	35	60	46	35	42	30	25	32

обчисліть величину коефіцієнта детермінації R^2 в регресії Y_t на X_t при наявності вільного члена. Проаналізуйте отриману регресію. Оцініть прогноз при $x_{n+1} = 52$. Перевірте адекватність моделі, $\alpha = 0,01$.

Задача 1.8. Оцінити модель простої лінійної регресії $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ за даними

Y	320	325	298	307	301	302	290
X	45	43	42	40	38	39	35

та перевірте її на адекватність, $\alpha = 0,05$.

Задача 1.9. Монополіст максимізує прибуток за наявності наступної функції попиту $Q = \alpha + \beta P + \varepsilon$. У минулому спостерігалася така залежність між цінами та рівнем продаж:

Q	3	3	7	6	10	15	16	13	9	15
P	18	16	17	12	15	15	4	13	11	6

Визначити максимальний доход монополіста. Знайти ціну, яку запропонує монополіст. Побудувати 90% надійний інтервал для випуску, що максимізує прибуток.

Задача 1.10. Для перевірки гіпотези по те, що обсяг продажів y_t залежить від витрат на рекламу a_t, побудовано регресію: $y_t = 0,36 + 0,75a_t$.

1. Перевірити гіпотезу, $\alpha = 0,05$.
2. Визначити, як зміниться обсяг продажів при зростанні витрат на рекламу на 1,7%.

Задача 1.11. Дослідження продажів по 23 торгових точках м. Києва показало таку залежність між кількістю проданих одиниць товару y та ціною p:

$$\ln y = 21,4 - 0,69 \ln x.$$

Перевірити гіпотезу про те, що еластичність попиту по ціні для досліджуваного товару складає –0,8, $\alpha = 0,01$

Задача 1.12. Дослідження продажів по 16 торгових точках м. Києва показало таку залежність між кількістю проданих одиниць товару y та ціною p:

$$y = 1,4 \cdot x^{-0,81}.$$

Перевірити гіпотезу про те, що еластичність попиту по ціні для досліджуваного товару складає –0,75, $\alpha = 0,05$

Задача 1.13. Вивчається залежність виду $y = \beta_0 x^{\beta_1} + \varepsilon$ при статистичній обробці $n = 21$ спостереження. Відомо, що $\sum \ln x \ln y = 5,21$, $\sum \ln x = 8,3$, $\sum \ln^2 x = 11,4$, $\sum \ln y = 4,7$, $\sum \ln^2 y = 7,4$.

1. Визначити коефіцієнти регресії.
2. Обчислити коефіцієнт еластичності.
3. Визначити коефіцієнт детермінації.
4. Перевірити модель на адекватність, $\alpha = 0,01$.

Задача 1.14. Досліджується залежність витрат індивіда від його заробітної плати x. По 30 спостереженнях були отримані такі варіанти регресій:

- $\hat{y} = \underset{(3,45)}{15 + 0,5\,x}$;
- $\ln \hat{y} = 1,4 + \underset{(7,11)}{0,2} \ln x$, $R^2 = 0,72$;
- $\ln y = 38 + \underset{(1,89)}{0,04} \ln x + \underset{(1,05)}{0,09}\, x$, $R^2 = 0,51$;
- $y = -0,3 + \underset{(3,12)}{0,5}\, x + \underset{(1,78)}{0,04}\, x^2$, $R^2 = 0,52$.

1. Визначити коефіцієнт детермінації для першого рівняння.
2. Записати друге та третє рівняння у структурному вигляді.
3. Визначити коефіцієнти еластичності для кожного з рівнянь.
4. Вибрати найкращий варіант рівняння регресії.

Група Б

Задача 1.15. Відома інформація про випуск продукції підприємством y та розмір його устаткування x:

Квартал	Випуск, тис. грн., y	Капітал, тис. грн., x
1997/Q1	57	395
1997/Q2	67	409
1997/Q3	76	501
1997/Q4	76	519
1998/Q1	91	547
1998/Q2	92	566
1998/Q3	93	568
1998/Q4	101	571
1999/Q1	102	574
1999/Q2	103	586
1999/Q3	103	606
1999/Q4	103	664
2000/Q1	103	667
2000/Q2	105	673
2000/Q3	117	680
2000/Q4	120	684
2001/Q1	120	684
2001/Q2	121	687
2001/Q3	122	709
2001/Q4	124	744
2002/Q1	125	751
2002/Q2	129	787
2002/Q3	131	809
2002/Q4	140	812

1. Побудувати регресію виду $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$.
2. Побувати надійні інтервали для коефіцієнтів моделі з рівнем надійності 99%.
3. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 95%.
4. Визначити, на скільки зросте випуск підприємства при збільшенні розміру устаткування на 3%.
5. Визначити, на скільки зросте випуск підприємства при збільшенні розміру устаткування на 1,2 млн. грн.

Задача 1.16. Відома інформація про доход підприємства у млн. грн., y, та відношення його капіталу до чисельності працюючих $\left(K/L\right)$:

y	K/L
2,263	12,116
2,266	12,137
2,284	12,259
2,300	12,364
2,367	12,805
2,412	13,109
2,442	13,313

y	K/L
2,508	13,757
2,538	13,960
2,585	14,280
2,653	14,745
2,667	14,845
2,670	14,859
2,686	14,975

y	K/L
2,698	15,056
2,728	15,259
2,749	15,409
2,795	15,728
2,896	16,429
2,945	16,772
3,245	18,906

y	K/L
3,268	19,077
3,284	19,193
3,297	19,282
3,350	19,668

1. Оцінити функцію Солоу $y_t = \alpha \cdot \left(K/L\right)^{\beta} + \varepsilon_t$.
2. Побувати надійні інтервали для коефіцієнтів моделі з рівнем надійності 95%.
3. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 90%.
4. Визначити, на скільки зросте доход підприємства при збільшенні відношення капіталу до праці на 1%.
5. Визначити, на скільки зросте доход підприємства при збільшенні відношення K/L на 0,4.

Задача 1.17. Для даних задачі 1.16 визначити залежність доходу підприємства від часу, побудувавши трендову регресію: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$.

1. Перевірити значущість коефіцієнта β, $\alpha = 0,01$.
2. Побувати надійні інтервали для коефіцієнтів моделі з рівнем надійності 90%.
3. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 99%.
4. Визначити, на скільки зростає в середньому доход підприємства за 1 період спостережень.
5. Зробити прогноз доходу підприємства на наступний період.

Задача 1.18. Відома інформація про доход підприємства у млн. грн., y, та відношення його капіталу до чисельності працюючих $\left(K/L\right)$:

y	K/L
7,203	6,242
7,941	6,771
7,314	6,322
5,969	5,337
5,577	5,044
6,048	5,396
6,509	5,737

y	K/L
6,990	6,088
5,808	5,217
6,015	5,372
5,537	5,014
7,663	6,573
5,571	5,039
6,063	5,407

y	K/L
7,427	6,404
6,730	5,899
7,713	6,608
6,804	5,953
5,959	5,330
7,540	6,485
6,330	5,605

y	K/L
7,089	6,160
7,907	6,747
5,831	5,235
5,536	5,013

1. Оцінити функцію Солоу $y_t = \alpha \cdot \left(K/L \right)^{\beta} + \varepsilon_t$.
2. Побувати надійні інтервали для коефіцієнтів моделі з рівнем надійності 90%.
3. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 95%.
4. Визначити, на скільки зросте доход підприємства при збільшенні відношення капіталу до праці на 2%.
5. Визначити, на скільки зросте доход підприємства при збільшенні відношення K/L на 0,1.

Задача 1.19. Для даних задачі 1.18 визначити залежність доходу підприємства від часу, побудувавши трендову регресію: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$.

1. Перевірити значущість коефіцієнта β, $\alpha = 0,05$.
2. Побувати надійні інтервали для коефіцієнтів моделі з рівнем надійності 95%.
3. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 95%.
4. Визначити, на скільки зростає в середньому доход підприємства за 1 період спостережень.
5. Зробити прогноз доходу підприємства на наступний період.

Задача 1.20. На основі даних про рівень накопичення (млрд. грн.), S, та доход (млрд. грн.) Y побудувати регресію виду $S_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t$:

S	Y
2,9	15,8
3,0	16,5
3,1	17,2
3,3	17,9
3,4	18,6
3,5	19,3
3,7	20,0
3,8	20,7

S	Y
3,9	21,4
4,0	22,1
4,2	22,8
4,3	23,5
4,4	24,2
4,6	24,9
4,7	25,6
4,8	26,3

S	Y
4,9	27,0
5,1	27,7
5,2	28,4
5,3	29,1
5,5	29,8
5,6	30,5
5,7	31,2
5,8	31,9

S	Y
6,0	32,6
6,1	33,3
6,2	34,0
6,4	34,7
6,5	35,4
6,6	36,1
6,7	36,8

1. Визначити значущість коефіцієнтів регресі, $\alpha = 0,05$.
2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 95%.
3. Побувати надійні інтервали для коефіцієнтів моделі з рівнем надійності 95%.
4. Визначити, на скільки відсотків зросте рівень накопичення, якщо доход зросте на 5%.
5. Обрахувати коефіцієнт кореляції між змінними, перевірити його значущість, $\alpha = 0,1$.

Тема 2. Множинна регресія

Основні визначення

Множинна регресія.

Множинна регресія – рівняння зв'язку з декількома незалежними змінними:

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\right) + \varepsilon,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ - значення незалежних змінних,

y - значення залежної змінної.

Класичні властивості збурень.

1. $M\varepsilon_i = 0$
2. Гомоскедастичність збурень: $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2 = const$, $i = \overline{1, n}$.
3. Незалежність збурень: $\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0, i \neq j$.
4. Незалежність збурень та регресорів: $\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, x_j\right) = 0, \forall i, j$.
5. Збурення ε_i нормально розподілені для всіх *i*.

Оцінка регресії.

Побудова регресії зводиться до оцінки її параметрів за **методом найменших квадратів (МНК)**:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\right)\right)^2 \to \min.$$

Якщо регресія записується у вигляді

$y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,k-1} + \varepsilon_i, i = \overline{1, n}$, то оцінки МНК можна знайти, розв'язавши систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\beta_0 + \beta_1 \sum x_1 + \beta_2 \sum x_2 + \ldots + \beta_{k-1} \sum x_{k-1} = \sum y, \\ \beta_0 \sum x_1 + \beta_1 \sum x_1^2 + \beta_2 \sum x_1 x_2 + \ldots + \beta_{k-1} \sum x_1 x_{k-1} = \sum x_1 y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_0 \sum x_{k-1} + \beta_1 \sum x_1 x_{k-1} + \beta_2 \sum x_2 x_{k-1} + \ldots + \beta_{k-1} \sum x_{k-1}^2 = \sum x_{k-1} y. \end{cases}$$

Якщо записати множинну лінійну регресію у матричній формі:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ –вектор значень залежної змінної,

$$X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1,k-1} \\ x_{20} & x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n,k-1} \end{pmatrix}$$ – матриця значень незалежних змінних,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$ – вектор збурень,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix}$$ – вектор параметрів (коефіцієнтів) регресії,

то вектор коефіцієнтів регресії можна знайти за формулою:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y .$$

Вибіркова регресійна функція має вигляд: $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_{k-1} x_{k-1}$.

Залишки моделі знаходяться за формулою: $e_i = \hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Дисперсійний аналіз.

Формула розкладу дисперсії має вигляд

$TSS = ESS + RSS$,

де $TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ – загальна сума квадратів,

$ESS = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ – пояснена сума квадратів,

$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ –сума квадратів залишків.

Статистичні властивості оцінок МНК.

$\mathrm{M}\hat{\beta} = \beta$,

$\mathbf{D}\hat{\beta} = \sigma^2 (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$.

На практиці величину σ^2 замінюють на її оцінку $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{RSS}{n-k}$.

Теорема Гауса-Маркова.

1. Нехай припущення про нормальність збурень не накладається. Тоді МНК–оцінки мають мінімальну коваріаційну матрицю в класі незміщених лінійних оцінок.

2. Припустимо, що збурення мають нормальний розподіл. МНК–оцінки мають мінімальну коваріаційну матрицю в класі усіх незміщених оцінок.

Коефіцієнт детермінації.

Коефіцієнт детермінації R^2 визначається як відношення поясненої і загальної сум квадратів:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}.$$

Коефіцієнт детермінації є частиною дисперсії залежної змінної, яка пояснюється за рахунок моделі, або, іншими словами, завдяки мінливості незалежної змінної. Коефіцієнт детермінації є мірою тісноти саме **лінійного** зв'язку між x та y. Коефіцієнт детермінації завжди знаходиться в межах від нуля до одиниці. Чим ближче R^2 до 1, тим точніше x пояснює y.

Скоригований коефіцієнт детермінації.

Скоригований коефіцієнт детермінації містить поправку на число степенів свободи і розраховується за формулою:

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{\dfrac{ESS}{n-k}}{\dfrac{TSS}{n-1}}.$$

Скоригований коефіцієнт детермінації завжди не перевищує коефіцієнт детермінації.

Гіпотеза про адекватність моделі (F-тест).

$H_0 : \forall \beta_i = 0, i = \overline{0, k-1}$.

Необхідно обрахувати практичне значення

$$F_{pr} = \frac{\dfrac{R^2}{k-1}}{\dfrac{1-R^2}{n-k}}$$

та порівняти його з теоретичною статистикою Фішера з k-1 та n-k степенями свободи і рівнем надійності $1-\alpha$:

$$F_{teor} = F\left(k-1, n-k, 1-\alpha\right).$$

Якщо $F_{pr} < F_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто регресія є статистично незначимою.

Гіпотеза про значення коефіцієнту регресії.

$H_0 : \beta_i = m$.

Обраховується практичне значення:

$$t_{pr} = \left| \frac{\hat{\beta}_i - m}{s.e.\left(\hat{\beta}_i\right)} \right|$$

та порівнюється з теоретичною статистикою Стьюдента з *n-k* степенями свободи:

$$t_{teor} = t\left(n-k, 1-\alpha\right).$$

Якщо $t_{pr} < t_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто значення коефіцієнту β_i можна прийняти рівним m.

Гіпотеза про значимість коефіцієнта регресії.

$H_0 : \beta_i = 0$.

Обраховується практичне значення:

$$t_{pr} = \left| \frac{\hat{\beta}_i}{s.e.\left(\hat{\beta}_i\right)} \right|$$

та порівнюється з теоретичною статистикою Стьюдента з *n-k* степенями свободи:

$$t_{teor} = t\left(n-k, 1-\alpha\right).$$

Якщо $t_{pr} < t_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто коефіцієнт β_i є значимим.

Надійні інтервали для коефіцієнтів регресії.

Надійний інтервал для коефіцієнта β_i:

$$[\hat{\beta}_i - \mathbf{s.e.}(\hat{\beta}_i) \cdot t_{\text{teor}}; \hat{\beta}_i + \mathbf{s.e.}(\hat{\beta}_i) \cdot t_{\text{teor}}],$$

де $t_{teor} = t\left(n-k, 1-\alpha\right)$.

Гіпотеза про систему лінійних обмежень на коефіцієнти регресії.

$H_0 : H\beta = r$,

де H – матриця коефіцієнтів при параметрах β_i в системі лінійних обмежень,

β – вектор параметрів регресії,

r – відомий вектор.

Обраховується практичне значення статистики

$$F_{pr} = \frac{\dfrac{\left(H\hat{\beta} - r\right)^T \left(H\left(X^T X\right)^{-1} H^T\right)^{-1} \left(H\hat{\beta} - r\right)}{q}}{\dfrac{RSS}{n-k}},$$

де q –кількість обмежень,

RSS – сума квадратів залишків моделі.

Обчислене значення порівнюється з теоретичною статистикою Фішера:

$$F_{teor} = F\left(q;\ \ n-k;\ 1-\alpha\right).$$

Якщо $F_{pr} < F_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається.

Прогноз за регресією.

Нехай відомі наступні значення незалежних змінних $x_{i,n+1}$, $i=\overline{1,k-1}$. Тоді прогноз обраховується за формулою:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1,n+1} + \hat{\beta}_2 x_{1,n+1} + \ldots + \hat{\beta}_{k-1} x_{k-1,n+1}.$$

Нормалізовані змінні – змінні, що використовуються для порівняння факторів за ступнем їх впливу.

$y_i^* = \dfrac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y}$, $i=\overline{1,n}$ – значення нормалізованої залежної змінної в i-му спостереженні;

$x_{ij}^* = \dfrac{x_{ij} - \overline{x}_j}{\sigma_{x_j}}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k-1}$ – значення нормалізованої j-ї незалежної змінної в i-му спостереженні.

Середній коефіцієнт еластичності.

Середній коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків в середньому зміниться значення y при зміні фактору x_j на 1% від свого середнього значення:

$$\overline{E}_{yx_j} = f'\left(x_j\right)\frac{\overline{x}_j}{\overline{y}} = \hat{\beta}_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}.$$

Частковий коефіцієнт еластичності.

Частковий коефіцієнт еластичності розраховується за формулою:

$$E_{yx_j} = \hat{\beta}_i \frac{x_i}{\hat{y}\left(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}\right)}.$$

Гіпотеза про стійкість моделі.

Розіб'ємо всі спостереження (n) на дві групи розмірами n_1 та n_2. Потрібно перевірити гіпотезу

$$H_0 : \forall\, \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)} = \beta_i, i = \overline{0,k-1}.$$

Якщо розмір кожної з груп достатній для побудови регресії, то використовується ліва група формул, якщо ж розмір другої групи n_2 не дозволяє побудувати регресію, то потрібно використовувати праву групу формул:

$F_{pr} = \dfrac{\dfrac{RSS - (RSS_1 + RSS_2)}{k}}{\dfrac{RSS_1 + RSS_2}{n-2k}}$ $F_{teor} = F\left(k, n-2k, 1-\alpha\right)$	$F_{pr} = \dfrac{\dfrac{RSS - RSS_1}{n_2}}{\dfrac{RSS_1}{n_1 - k}},$ $F_{teor} = F\left(n_2, n_1 - k, 1-\alpha\right)$

де $RSS, RSS1, RSS2$ – суми квадратів залишків в регресіях по всіх спостереженнях, по першій групі, по другій групі відповідно.

Якщо $F_{pr} < F_{teor}$, то гіпотез про стійкість моделі приймається, в протилежному випадку – відхиляється.

Мультиколінеарність – лінійна залежність двох або більше факторів між собою.

Гіпотеза про наявність мультиколінеарності.

Нехай обрахована кореляційна матриця для факторів регресійної моделі

$$R = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & & r_{x_1x_{k-1}} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & & r_{x_2x_{k-1}} \\ & & & & \\ & & & \dots & \\ r_{x_{k-1}x_1} & r_{x_{k-1}x_2} & r_{x_{k-1}x_3} & & r_{x_{k-1}x_{k-1}} \end{pmatrix}$$

$H_0 : \mathrm{Det}\left|R\right| = 1$.

Обраховується практичне значення

$$\chi^2_{pr} = n - 1 - \frac{1}{6}\left(2\left(k-1\right)+5\right)\ln \mathrm{Det}\, R,$$

і порівнюється з теоретичним:

$$\chi^2_{teor} = \chi^2\left(\frac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2};1-\alpha\right).$$

Якщо $\chi^2_{pr} > \chi^2_{teor}$, то гіпотеза відхиляється, а значить присутня мультиколінеарність.

Гіпотеза про доцільність розширення регресії.

Нехай побудовано регресію $y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1}x_{i,k-1} + \varepsilon_i, i = \overline{1,n}$, і розглядається питання про доцільність включення ще однієї додаткової змінної x_k. Для перевірки подібної гіпотези підраховується практичне значення F – статистики

$$F_{pr} = \frac{\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{1}}{\dfrac{1-R_2^2}{n-k}},$$

де R_1^2 – коефіцієнт детермінації в початковій моделі, R_2^2 – коефіцієнт детермінації в моделі з додатковою змінною. Обчислене значення необхідно порівняти з теоретичним $F_{teor} = F\left(1;n-k;1-\alpha\right)$. Якщо $F_{pr} < F_{teor}$, то змінну x_k включати до регресії недоцільно.

Гіпотеза про значимість часткового коефіцієнта кореляції.

$H_0 : r_{x_ix_j} = 0$.

Обраховується практичне значення:

$$t_{pr} = \left| \frac{\hat{r}_{x_i x_j}}{\sqrt{\frac{1-\hat{r}^2_{x_i x_j}}{n-k}}} \right|$$

та порівнюється з теоретичною статистикою Стьюдента з $n-k$ степенями свободи:

$$t_{teor} = t\left(n-k, 1-\alpha\right).$$

Якщо $t_{pr} < t_{teor}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто залежність між змінними x та y є статистично незначимою.

Фіктивні змінні – змінні, що приймають лише значення 0 та 1, використовуються для моделювання якісних ознак, наприклад, статі людини, визначення сезонних коливань тощо.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

Бюджетне обстеження п’яти випадково вибраних сімей дало результати:

Сім’я	1	2	3	4	5
Накопичення, S	3	6	5	3,5	1,5
Доход, Y	40	55	45	30	30
Майно, W	60	36	36	15	90

Оцініть регресію S на Y та W з константою. Спрогнозуйте накопичення сім’ї, якщо її доход 40 тис. грн., а майно 25 тис. грн. Нехай доход зріс на 10 тис. грн. Як зростуть накопичення сім’ї? Знайдіть коефіцієнт детермінації моделі.

Розв'язок.

Оцінимо регресію $S_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \beta_2 W_i + \varepsilon_i, i = \overline{1,5}$. Для знаходження коефіцієнтів регресії можна скористатися двома способами.

Спосіб 1. Оцінка коефіцієнтів регресії знаходиться за формулою:

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T S,$$

де матриця $X = \begin{pmatrix} 1 & 40 & 60 \\ 1 & 55 & 36 \\ 1 & 45 & 36 \\ 1 & 30 & 15 \\ 1 & 30 & 90 \end{pmatrix}$, вектор $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 3,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T S = \left(\begin{pmatrix} 1 & 40 & 60 \\ 1 & 55 & 36 \\ 1 & 45 & 36 \\ 1 & 30 & 15 \\ 1 & 30 & 90 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 40 & 60 \\ 1 & 55 & 36 \\ 1 & 45 & 36 \\ 1 & 30 & 15 \\ 1 & 30 & 90 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 40 & 60 \\ 1 & 55 & 36 \\ 1 & 45 & 36 \\ 1 & 30 & 15 \\ 1 & 30 & 90 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 3,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2787 \\ 0,1229 \\ -0,0294 \end{pmatrix}$$

Спосіб 2. Розв'яжемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\beta_0 + \beta_1 \sum Y + \beta_2 \sum W = \sum S, \\ \beta_0 \sum Y + \beta_1 \sum Y^2 + \beta_2 \sum YW = \sum YS, \\ \beta_0 \sum W + \beta_1 \sum YW + \beta_2 \sum W^2 = \sum WS. \end{cases}$$

Знаходимо $n = 5$, $\sum S = 19$, $\sum Y = 200$, $\sum W = 237$, $\sum SY = 825$, $\sum SW = 763,5$, $\sum WY = 9150$, $\sum Y^2 = 8450$, $\sum W^2 = 14517$.

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum Y & \sum W \\ \sum Y & \sum Y^2 & \sum YW \\ \sum W & \sum YW & \sum W^2 \end{vmatrix} = 6842700,$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \sum S & \sum Y & \sum W \\ \sum YS & \sum Y^2 & \sum YW \\ \sum WS & \sum YW & \sum W^2 \end{vmatrix} = 1907325,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} n & \sum S & \sum W \\ \sum Y & \sum YS & \sum YW \\ \sum W & \sum WS & \sum W^2 \end{vmatrix} = 840825,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} n & \sum Y & \sum S \\ \sum Y & \sum Y^2 & \sum YS \\ \sum W & \sum YW & \sum WS \end{vmatrix} = -201225,$$

звідки

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1907325}{6842700} = 0,2787,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{840825}{6842700} = 0,1229,$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-201225}{6842700} = -0,0294.$$

Як видно, будь-який зі способів призводить до однієї і тієї ж вибіркової функції:

$\hat{S} = 0,2787 + 0,1229Y - 0,0294W$.

Коефіцієнт детермінації можна знайти за формулою:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left(\hat{S}_i - \overline{S}\right)^2}{\sum_{i=1}^{5}\left(S_i - \overline{S}\right)^2} = \frac{12,0196}{12,3} = 0,977.$$

Якщо $Y = 40$, $W = 25$, то $\hat{S} = 0,2787 + 0,1229 \cdot 40 - 0,0294 \cdot 25 = 4,4587$.

З вибіркової регресійної функції видно, що при зростанні доходу на 1, накопичення зростають на 0,1229, тому при зростанні доходу на 10 тис. грн, накопичення збільшиться на 1229 грн.

Приклад 2.

На основі 30 спостережень була оцінена така регресія:

$$y = \underset{(3,14)}{0,25} + \underset{(1,82)}{1,14}\, x_1 - \underset{(0,92)}{2,45}\, x_2,\ RSS = 1,16, TSS = 8,67.$$

1. Визначити, які з коефіцієнтів регресії є значимими з рівнем надійності 0,95.
2. Перевірити гіпотезу $\beta_1 = 1$ з рівнем надійності 0,95.
3. Підрахувати коефіцієнт детермінації та скоригований коефіцієнт детермінації.
4. Перевірити модель на адекватність.

Розв'язок.

1. Для перевірки значимості коефіцієнтів слід порівняти практичні значення *t*-статистик, що розташовані під коефіцієнтами моделі, з теоретичним значенням $t_{teor} = t\left(n-3; 1-\alpha\right) = t\left(27; 0,95\right) = 2,052$. Таким чином, коефіцієнти β_1 та β_2 є статистично незначимими, а коефіцієнт β_0 – статистично значимим.
2. Визначимо стандартне відхилення для коефіцієнта β_1:

   $$1,82 = t_{pr} = \frac{\hat{\beta}_1}{s.e.\left(\hat{\beta}_1\right)} = \frac{1,14}{s.e.\left(\hat{\beta}_1\right)},\ s.e.\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{1,14}{1,82} = 0,626.$$

   Тоді маємо:

   $t_{pr} = \left|\frac{\hat{\beta}_1 - 1}{s.e.\left(\hat{\beta}_1\right)}\right| = \frac{1,14-1}{0,626} = 0,22$, що менше за теоретичне значення $t_{teor} = t\left(27; 0,95\right) = 2,052$. Таким чином, значення коефіцієнта β_1 можна прийняти рівним 1.
3. Коефіцієнт детермінації дорівнює $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{1,16}{8,67} = 0,866$.

Для знаходження скоригованого коефіцієнта детермінації слід скористатися формулою:

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\frac{RSS}{n-k}}{\frac{TSS}{n-1}} = 1 - \frac{\frac{1,16}{27}}{\frac{8,67}{29}} = 0,856.$$

4. Обрахуємо практичне значення $F_{pr} = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} = \frac{\frac{0,866}{2}}{\frac{1-0,866}{27}} = 87,246$, теоретичне значення $F_{teor} = F\left(2;27;0,9\right) = 2,51$. Таким чином, оскільки практичне значення більше за теоретичне, то модель виявилася адекватною.

Приклад 3.

Відома інформація по деяких підприємствах України по випуску продукції Y (млн. грн.), основному капіталу K (млн. грн.), чисельності працюючих L (тис.люд.-год.).

№	Y	K	L	LnY	ln$K$	ln$L$
1.	64,3	42,4	13,5	4,16	3,75	2,61
2.	47,2	30,7	21,0	3,86	3,42	3,04
3.	63,6	48,9	16,1	4,15	3,89	2,78
4.	117,9	61,3	25,9	4,77	4,12	3,25
5.	111,3	60,4	22,5	4,71	4,10	3,12
6.	123,0	66,8	32,1	4,81	4,20	3,47
7.	26,5	19,8	5,7	3,28	2,99	1,74
8.	71,9	43,2	18,8	4,28	3,77	2,94
9.	118,1	59,1	29,1	4,77	4,08	3,37
10.	77,3	33,0	21,9	4,35	3,50	3,08
11.	69,2	37,7	26,7	4,24	3,63	3,29
12.	48,4	25,7	24,0	3,88	3,25	3,18
13.	42,1	23,8	11,3	3,74	3,17	2,42
14.	53,5	34,3	10,4	3,98	3,53	2,34
15.	46,8	36,7	16,3	3,85	3,60	2,79
16.	42,5	20,6	9,0	3,75	3,02	2,20
17.	84,0	39,2	29,3	4,43	3,67	3,38
18.	69,5	41,2	29,0	4,24	3,72	3,37
19.	79,0	47,6	23,6	4,37	3,86	3,16
20.	62,9	41,6	9,2	4,14	3,73	2,22
21.	62,8	42,1	13,4	4,14	3,74	2,60
22.	77,7	41,6	22,2	4,35	3,73	3,10
23.	106,5	62,1	35,2	4,67	4,13	3,56
24.	96,1	45,0	24,5	4,57	3,81	3,20

№	Y	K	L	LnY	ln$K$	ln$L$
25.	83,9	43,8	24,1	4,43	3,78	3,18
26.	61,8	39,8	8,5	4,12	3,68	2,14
27.	119,4	69,7	28,2	4,78	4,24	3,34
28.	65,0	56,4	16,0	4,17	4,03	2,77
29.	95,6	74,5	22,1	4,56	4,31	3,09
30.	51,8	38,1	12,9	3,95	3,64	2,56
31.	137,9	65,9	37,7	4,93	4,19	3,63
32.	50,2	26,7	21,4	3,92	3,28	3,06
33.	64,0	52,5	13,5	4,16	3,96	2,60
34.	84,8	56,8	16,2	4,44	4,04	2,78
35.	119,1	69,0	24,9	4,78	4,23	3,22

Необхідно оцінити виробничу функцію Коба-Дугласа $Y = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2} + \varepsilon$ та перевірити гіпотезу $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1, \\ \beta_0 = 2. \end{cases}$

Розв'язок.

Для оцінювання виробничу функцію слід перетворити до множинної лінійної регресії шляхом логарифмування:

$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 K_i + \beta_2 L_i + \varepsilon_i, i = \overline{1,35}$.

Оцінюємо отриману регресію звичайним методом найменших квадратів:

$\ln Y = 0,63 + 0,72 \ln K + 0,32 \ln L$, $R^2 = 0,94$, $RSS = 0,5847$.

Необхідна гіпотеза записується у вигляді:

$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1, \\ \ln \beta_0 = \ln 2, \end{cases}$ тобто $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 1 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$, $q = 2, n - k = 32$. Тоді

$$F_{pr} = \frac{\dfrac{\left(H\hat{\beta} - r\right)^T \left(H\left(X^T X\right)^{-1} H^T\right)^{-1} \left(H\hat{\beta} - r\right)}{q}}{\dfrac{RSS}{n-k}} = 1,22,$$

$F_{teor} = F\left(2;\ \ 32;\ 0,9\right) = 2,48$.

Оскільки $F_{pr} < F_{teor}$, то гіпотеза про лінійні обмеження приймається, тобто підприємства мають постійну віддачу від масштабу.

Приклад 4.

Побудувати сезонну регресію для прибутків підприємств України, використовуючи дані за 1998-2000 роки.

Квартал	**Прибуток**
98-I	4827,6
98-II	4276,8
98-III	4750,3
98-IV	5986,3
99-I	5633,6
99-II	5688,5
99-III	7449,8
99-IV	9637,6
00-I	7501,3
00-II	7542,0
00-III	8273,2
00-IV	12806,9

Зробити прогноз на перший квартал 2001 року. Підрахувати похибку прогнозування, якщо справжнє значення прибутків становило 8935,5 млн. грн.

Розв'язок.

Будемо будувати модель виду

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 q_{t1} + \beta_2 q_{t2} + \beta_3 q_{t3} + \beta_4 t + \varepsilon_t ,$$

де q_1 – фіктивна змінна, що приймає значення 1, якщо розглядається перший квартал року, 0 – в інших випадках,

q_2 – фіктивна змінна, що приймає значення 1, якщо розглядається другий квартал року, 0 – в інших випадках,

q_3 – фіктивна змінна, що приймає значення 1, якщо розглядається третій квартал року, 0 – в інших випадках,

t – трендовий компонент, що показує зростання прибутків протягом часу спостережень.

Побудуємо матрицю незалежних змінних:

Константа	q_1	q_2	q_3	t
1	1	0	0	1
1	0	1	0	2
1	0	0	1	3
1	0	0	0	4
1	1	0	0	5
1	0	1	0	6
1	0	0	1	7
1	0	0	0	8
1	1	0	0	9
1	0	1	0	10
1	0	0	1	11
1	0	0	0	12

Знаходимо оцінку коефіцієнтів регресії:

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix}5406,3 & -1963,0 & -2623,5 & -2143,7 & 508,8\end{pmatrix}^T.$$

Таким чином, вибіркова регресійна функція має вигляд:

$$y_t = 5406,3 - 1963 \cdot q_{t1} - 2623,5 \cdot q_{t2} - 2143,7 \cdot q_{t3} + 508,8 \cdot t.$$

Знаходимо коефіцієнт детермінації $R^2 = \dfrac{ESS}{TSS} = 0,906$. Модель адекватна, оскільки практичне значення $F_{pr} = 16,92$ більше за теоретичне $F_{teor} = F\left(4;7;0,95\right) = 4,12$.

В першому кварталі 2001 року незалежні змінні прийматимуть значення: $q_1 = 1$, $q_2 = q_3 = 0$, $t = 13$. Прогноз становить:

$$\hat{y}_t = 5406,3 - 1963 \cdot 1 - 2623,5 \cdot 0 - 2143,7 \cdot 0 + 508,8 \cdot 13 = 10058,1 \text{ млн. грн.}$$

Похибка прогнозування дорівнює

$$MAPE = 100\frac{\left|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\right|}{y_{n+1}} = 100\frac{\left|10058,1 - 8935,5\right|}{8935,5} = 12,56\%.$$

Приклад 5.

Дослідити на стійкість модель залежності грошової маси (M2, млн. грн.) від відсоткової ставки НБУ (R, %) за критерієм дисперсійного аналізу, розбивши всі спостереження на дві групи розмірами $n_1 = 16$ та $n_2 = 12$ з рівнем надійності 95%.

Квартали	M2	R
1993/Q1	47	80
1993/Q2	79	186,7
1993/Q3	260	240
1993/Q4	386	240
1994/Q1	574	240
1994/Q2	927	240
1994/Q3	1596	161,1
1994/Q4	2163	283,3
1995/Q1	2681	239,1
1995/Q2	3845	107,4
1995/Q3	4645	68,9
1995/Q4	5269	97,4
1996/Q1	5562	102,3
1996/Q2	6077	65,3

Квартали	M2	R
1996/Q3	6220	40,1
1996/Q4	7306	40
1997/Q1	8040	32,8
1997/Q2	9279	23,4
1997/Q3	10464	17
1997/Q4	10775	24,7
1998/Q1	10973	40
1998/Q2	11269	44,9
1998/Q3	10873	80
1998/Q4	12175	79,4
1999/Q1	11976	60
1999/Q2	14242	50,1
1999/Q3	15360	45
1999/Q4	16820	45

Розв'язок.

Оцінюємо послідовно 3 регресії:

	Вид регресії	Коефіцієнт детермінації, R^2	Сума квадратів залишків, RSS
По всіх спостереженнях	$\hat{M} = 11642,8 - 45,8R$	0,568	305482333,6
По першій групі	$\hat{M} = 6374,8 - 22,4R$	0,557	43476277,5
По другій групі	$\hat{M} = 10263,9 + 35,2R$	0,080	63563902,0

Підраховуємо

$$F_{pr} = \frac{\dfrac{RSS - (RSS_1 + RSS_2)}{k}}{\dfrac{RSS_1 + RSS_2}{n - 2k}} = \frac{\dfrac{305482333,6 - \left(43476277,5 + 63563902,0\right)}{2}}{\dfrac{43476277,5 + 63563902,0}{28 - 2 \cdot 2}} = 22,25$$

$$F_{teor} = F\left(2, 24, 0,95\right) = 3,40.$$

Оскільки $F_{pr} > F_{teor}$, то гіпотеза про стійкість моделі відхиляється. Таким чином, необхідно розглядати окрему регресію на кожному з часових інтервалів.

Приклад 6.

Відомо 16 спостережень чотирьох величин:

y	x1	x2	x3
7,49	2,25	9,9	6,09
10,64	4,42	11,54	7,49
11,44	6,08	13,73	8,46
13,24	8,65	14,26	8,59
16,99	10,64	14,91	10,43
18,57	13,29	17,02	10,52
21,07	15,95	18,84	11,65
23,23	18,25	20,06	13,55

y	x1	x2	x3
27,37	21,10	21,71	13,67
27,12	22,67	22,31	14,33
29,42	24,99	22,39	13,95
32,43	26,00	24,5	16,34
31,74	27,34	24,76	14,81
35,16	29,75	24,99	15,13
37,07	31,87	25,94	15,46
38,74	33,55	27,35	16,96

1. Визначити наявність мультиколінеарності в регресії з рівнем надійності 95%.
2. Визначити пари лінійно залежних факторів.
3. На основі часткового F –критерію провести специфікацію найкращої лінійної моделі.

Розв'язок.

Знаходимо матрицю парних кореляцій:

	x1	x2	x3
x1	1,0000	0,9931	0,9724
x2	0,9931	1,0000	0,9860
x3	0,9724	0,9860	1,0000

Її детермінант дорівнює $\det R = 0,000337$,

$$\chi^2_{pr} = n - 1 - \frac{1}{6}\left(2\left(k - 1\right) + 5\right)\ln DetR = 30,658,$$

$$\chi^2_{teor}\left(\frac{1}{2}(k-1)(k-2);0,95\right)=\chi^2(3;0,95)=7,8.$$

Таким чином, мультиколінеарність присутня.

Матриця t-статистик, обрахованих за формулою $t_{pr_{ij}}=\left|\frac{\hat{r}_{x_i x_j}}{\sqrt{\frac{1-\hat{r}^2_{x_i x_j}}{n-k}}}\right|$ має вигляд:

	x1	x2	x3
x1		29,30581	14,42633
x2			20,46764
x3			

Оскільки критичне значення $t_{teor}=t(12;0,95)=2,18$, то попарний лінійний зв'язок існує між всіма змінними.

Оцінимо регресії, виключивши одну та дві змінних, підрахуємо коефіцієнти детермінації та практичні $F_{pr}=\frac{\frac{R_2^2-R_1^2}{1}}{\frac{1-R_2^2}{n-k}}$ і теоретичні $F_{teor}=F(1;n-k;1-\alpha)$ значення F –статистик при додаванні нових факторів:

№	Регресія	R^2	F_{pr}, якщо додати			F_{teor}
			x1	x2	x3	
1.	$y=6,34+1,04x_1-0,48x_2+0,61x_3$	0,996513				
2.	$y=4,87+0,947x_1+0,07x_2$	0,995478			3,56	4,75
3.	$y=-11,65+1,91x_2-0,16x_3$	0,982896	46,86			4,75
4.	$y=3,54+0,88x_1+0,318x_3$	0,996081		1,49		4,75
5.	$y=5,56+0,99x_1$	0,995457		0,06	2,07	4,67
6.	$y=-11,72+1,81x_2$	0,982817	36,40		0,06	4,67
7.	$y=-12+2,91x_3$	0,952546	144,41	23,07		4,67

Таким чином видно, що до регресії 7 варто включити фактори x1 та x2, до регресії 6 – фактор x1, а до регресії 3 – фактор x1. Проведений аналіз доводить, що не слід розглядати модель без змінної x1, проте модель 5 є самодостатньою. Таким чином, найкращою буде модель $y=5,56+0,99x_1$.

Задачі

Група А

Задача 2.1. Чи можуть наступні рівняння бути перетвореними в рівняння, лінійні за параметрами?

1. $y_t = \alpha \cdot e^{\beta x_t} \cdot \varepsilon_t$;
2. $y_t = \alpha \cdot \ln x_1 + \beta \ln \gamma^{x_2} + \delta e^{x_3} + \varepsilon_t$;
3. $y_t = \alpha e^{-\beta x_t} + \varepsilon_t$;
4. $y_t = \alpha \ln\left(x_3 x_1\right) + \beta \ln \gamma^{x_1 x_2} + \delta x_3 e^{x_3} + \varepsilon_t$;
5. $y_t = e^{\alpha + \beta x_t + \varepsilon_t}$;
6. $y_t = \alpha \cdot \ln\left(\phi x_1\right) + \beta \ln \gamma^{x_1 x_2} + \delta e^{x_3} + x_4 + \varepsilon_t$;
7. $y_t = \dfrac{\alpha}{\beta - x_t} + \varepsilon_t$;
8. $y_t = \alpha \cdot \gamma \cdot x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + \beta \ln \gamma^{x_1 x_2} + \delta e^{x_3} + \varepsilon_t$.

Задача 2.2. Довести, що МНК–оцінка коефіцієнтів множинної лінійної регресії $y = X\beta + \varepsilon$ є незміщеною.

Задача 2.3. Знайдіть коваріаційну матрицю МНК-оцінки коефіцієнтів множинної лінійної регресії $y = X\beta + \varepsilon$.

Задача 2.4. Нехай $\hat{\beta}$ – оцінка вектору коефіцієнтів при регресії $y = X\beta + \varepsilon$ за допомогою МНК, а $\hat{\alpha}$ – будь-який інший *k*-вимірний вектор. Довести, що

$$\left(y - X\hat{\alpha}\right)^T \left(y - X\hat{\alpha}\right) - \left(y - X\hat{\beta}\right)^T \left(y - X\hat{\beta}\right) = \left(\hat{\alpha} - \hat{\beta}\right)^T X^T X \left(\hat{\alpha} - \hat{\beta}\right).$$

Задача 2.5. Задана матриця коваріацій оцінок параметрів моделі.

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 11,4 & 1,7 & -0,9 \\ 1,7 & 1,4 & -0,4 \\ -0,9 & -0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Визначити дисперсії оцінок параметрів моделі та їх стандартні помилки.

Задача 2.6. За допомогою МНК отримано рівняння $\left(n = 24\right)$:

$$y_t = \underset{(2,14)}{1,12} - \underset{(0,0034)}{0,098}x_{1t} - \underset{(3,42)}{5,62}x_{2t} + \underset{(0,009)}{0,044}x_{t3},$$

$RSS = 110,32, ESS = 21,43$.

1. Перевірте значимість кожного коефіцієнта, $\alpha = 0,1$
2. Знайдіть коефіцієнт детермінації.
3. Протестуйте значимість моделі в цілому, $\alpha = 0,1$.

Задача 2.7. Бюджетне обстеження п’яти випадково вибраних сімей дало результати:

Сім’я	1	2	3	4	5
Накопичення, S	3	6	5	3,5	1,5
Доход, Y	40	55	45	30	30
Майно, W	60	36	36	15	90

1. Оцініть регресію S на Y та W з константою.
2. Знайдіть коефіцієнт детермінації моделі.
3. Побудувати 90%-надійні інтервали для коефіцієнтів регресії.
4. Перевірити гіпотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0, \alpha = 0,05$.
5. Перевірити гіпотезу про незначимість величини доходу $H_0 : \beta_2 = 0$, $\alpha = 0,05$.
6. Перевірити гіпотезу про незначимість вартості майна $H_0 : \beta_3 = 0, \alpha = 0,01$.
7. Перевірити гіпотезу про пряму залежність між споживанням та доходом $H_0 : \beta_2 = 1, \alpha = 0,1$.
8. Перевірити гіпотезу, що ефект доходу протилежний ефекту майна у фіксованій пропорції: $H_0 : \beta_2 = -4\beta_3, \alpha = 0,01$.

Задача 2.8. Спостереження було умовно розбито на дві підгрупи, для яких було обраховано:

	Група 1	Група 2
n	25	15
$\sum y_i$	21	32
$\sum x_i$	17	24
$\sum (y_i - \bar{y})^2$	113	153
$\sum (x_i - \bar{x})^2$	65	72
$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	74	91

1. Обчислити оцінки регресії $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ для всіх спостережень і для кожної з груп окремо.
2. Обчислити відповідні коефіцієнти детермінації.
3. Перевірити моделі на адекватність, $\alpha = 0,05$.
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі, $\alpha = 0,01$.

Задача 2.9. По групі підприємств, що випускають однорідну продукцію, відомо, як залежить собівартість одиниці продукції y від факторів:

Фактори	Регресія	Середнє значення фактору
Випуск, млн. грн., x_1	$\hat{y}_{x_1} = 0,2 + 1,8\dfrac{1}{x_1}$	$\overline{x}_1 = 6,2$
Обсяг робочої сили, тис. люд.-год., x_2	$\hat{y}_{x_2} = 3,3 + 4,8x_2$	$\overline{x}_2 = 25,6$
Середньозважена ціна ресурсів, млн. грн., x_3	$\hat{y}_{x_3} = 1,5 + x_3^{1,4}$	$\overline{x}_3 = 1,4$
Доля податків, %, x_4	$\hat{y}_{x_4} = 11,5 \cdot 1,03^{x_4}$	$\overline{x}_4 = 29,1$

Ранжувати за допомогою коефіцієнтів еластичності фактори за ступенем їх впливу на результат.

Задача 2.10. На основі статистичної інформації була побудована економетрична модель залежності попиту на товар (y, одиниць) та доходами населення (x_1, грн.), ціною на цей товар (x_2, грн. за одиницю):

$$y = 25,1 + 1,7x_1 - 2,3x_2.$$

Відомо, що $\sum_{i=1}^{45}\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2 = 291,3, \sum_{i=1}^{45}\hat{\varepsilon}_i = 15,2$.

1. Визначити з рівнем надійності 95% адекватність моделі.
2. Дати економічне тлумачення оцінок параметрів моделі

Задача 2.11. По 30 спостереженнях обраховано матрицю

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,1 & 3,3 & 1,1 \\ 1,5 & 0,4 & 1,7 \\ 2,3 & -0,3 & 1,6 \end{pmatrix} \text{та } RSS = 31,4.$$

Визначити стандартні помилки оцінок параметрів моделі

$$y = 17,4 - 2,1x_1 + 1,3x_2$$

та перевірити їх статистичну значущість з рівнем надійності 0,9.

Задача 2.12. Розрахована матриця коефіцієнтів парної кореляції для трьох пояснюючих змінних моделі з нормалізованими змінними $y^* = 1,2x_1^* + 0,8x_2^* - 1,4x_3^*$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & -0,7 \\ 0,8 & 1 & -0,4 \\ -0,7 & -0,4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Визначити наявність мультиколінеарності, $\alpha = 0,05$.
2. Ранжувати змінні за ступенем їх впливу на залежну змінну.

Задача 2.13. Для 30 спостережень незалежних змінних множинної лінійної регресії розрахована кореляційна матриця незалежних змінних:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,73 & -0,27 \\ 0,73 & 1 & 0,12 \\ -0,26 & 0,12 & 1 \end{pmatrix}$$

Визначити наявність мультиколінеарності, $\alpha = 0,1$.

Задача 2.14. Регресія залежної змінної y на три незалежні змінні на основі $n = 27$ спостережень виглядає наступним чином:

y	$=$	12,3	$+$	$1,4x_1$	$+$	$0,2x_2$	$-$ $1,8x_3$
Стандартні похибки		(...)		(...)		7,7	0,8
t–значення		(...)		2,1		(...)	(...)
90%-надійні границі		$\pm 4,2$		(...)		(...)	(...)

Заповнити пропуски.

Задача 2.15. Побудовано економетричну модель:

$$R_t = \underset{(0,6)}{0,03} + \underset{(7,4)}{0,18}\ln Y_t - \underset{(2,8)}{1,2}\ln I_t,$$

де R_t – відсоткова ставка, Y_t – ВВП країни, I_t – обсяг інвестицій.

1. Перевірити значущість коефіцієнтів регресії.
2. Дати економічне інтерпретацію результатів.
3. Визначити, як зміниться відсоткова ставка, якщо доход зросте на 2%.
4. Визначити, як зміниться відсоткова ставка, якщо інвестиції збільшаться на 1,7%.

Задача 2.16. На основі аналізу 30 спостережень була оцінена модель $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \varepsilon_t$:

$$y_t = 1,5 + \underset{(2,1)}{3,2}\,x_{1t} + \underset{(3,2)}{1,5}\,x_{2t} + \underset{(0,9)}{2,1}\,x_{3t}, R^2 = 0,861.$$

Оцінка цієї ж моделі при обмеженні $\beta_1 = \beta_3$ дало наступні результати:

$$y_t = 2,1 + \underset{(3,9)}{4,1}\left(x_{1t} + x_{t3}\right) + \underset{(6,3)}{0,9}\,x_{2t}, R^2 = 0,815.$$

1. Перевірити гіпотезу $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\alpha = 0,05$.
2. Перевірити гіпотезу про обмеження $H_0: \beta_1 = \beta_3$, $\alpha = 0,1$.

Задача 2.17. Для моделі $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta x_{2t} + \varepsilon_t$ по $n = 50$ спостереженнях отримана наступна матриця сум добутків відповідних змінних:

	$y_t - \bar{y}$	$x_{1t} - \bar{x}_1$	$x_{2t} - \bar{x}_2$
$y_t - \bar{y}$	1245	74	62
$x_{1t} - \bar{x}_1$	74	13	6
$x_{2t} - \bar{x}_2$	62	6	3

Перевірити гіпотезу $H_0 : 4\beta_1 = \beta_2, \alpha = 0,1$.

Задача 2.18. На фірмі працює 23 жінки та 17 чоловіків. Середня заробітна платня жінок 342 грн., чоловіків – 394 грн.

1. Оцінити регресію $y_t = \beta_0 + \beta_1 d_t + \varepsilon_t$, де y_t – заробітна плата,

   $$d_t = \begin{cases} 0, & \text{жінка} \\ 1, & \text{чоловік} \end{cases}.$$
2. Перевірити гіпотезу про відсутність дискримінації $H_0 : \beta_1 = 0$, $\alpha = 0,1$.
3. Обчислити коефіцієнт детермінації моделі.
4. Перевірити модель на адекватність, $\alpha = 0,01$.
5. Визначити стандартні похибки коефіцієнтів моделі.

Група Б

Задача 2.19. За наведеними даними

y	x_1	x_2
28,4	635,7	92,9
32,0	688,1	94,5
37,7	753,0	97,2
40,6	796,3	100,0
47,7	868,5	104,2
52,9	935,5	109,8
58,5	982,4	116,3
64,0	1063,4	121,3

y	x_1	x_2
75,9	1171,1	125,3
94,4	1306,6	133,1
131,9	1412,9	147,7
126,9	1528,8	161,2
155,4	1702,2	170,5
185,8	1899,5	181,5
217,5	2127,6	195,4
260,9	2368,5	217,4

1. оцінити регресії

- $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \varepsilon_t$;
- $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{2t} + \varepsilon_t$;
- $y_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \varepsilon_t$.

2. Проінтерпретувати отримані результати.
3. Вибрати найкращу регресію.

Задача 2.20. Наведено статистику по 15 підприємствах, що випускають однорідну продукцію.

№ п/п	Обсяг виробництва, тис. грн., y	Середня продуктивність праці, грн./год., x_1	Ефективність капітальних активів, грн./1000 грн., x_2
1	26	37	39
2	33	33	40
3	24	15	35
4	29	36	48
5	42	26	53
6	24	24	42
7	52	15	54
8	56	33	54
9	26	44	50
10	45	34	53
11	27	63	46
12	54	8	50
13	34	44	43
14	48	43	55
15	45	31	51

1. Обчислити коефіцієнти регресії $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$.
2. Обрахувати стандартні похибки для коефіцієнтів моделі.
3. Визначити коефіцієнт детермінації.
4. Перевірити модель на адекватність, $\alpha = 0,1$.
5. Перевірити гіпотезу $H_0 : \beta_2 = 1,4, \alpha = 0,1$.
6. Перевірити гіпотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1, \alpha = 0,1$.
7. Перевірити залишки на наявність автокореляції, $\alpha = 0,01$.
8. Визначити обсяг виробництва підприємства, у якого середня продуктивність праці $x_1 = 45$, ефективність капітальних активів $x_2 = 59$.
9. Підрахувати коефіцієнти еластичності. Визначити найбільш суттєвий фактор.

Задача 2.21. За даними, наведеними у таблиці, оцініть функцію Коба-Дугласа $y_t = \beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} + \varepsilon_t$:

Фірма	1	2	3	4	5	6	7
y	20	12	31	13	24	15	37
L	302	310	307	298	325	320	323
K	30	35	45	44	36	56	61

1. Обчислити коефіцієнт детермінації, скоригований коефіцієнт детермінації, вибірковий коефіцієнт кореляції між $\ln K$ та $\ln L$.
2. Оцініити регресію $\ln y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln K_t + \varepsilon_t$.
3. Перевірити наявність мультиколінеарності, $\alpha = 0,05$.

Задача 2.22. За наведеними даними оцінити модель Коба-Дугласа $y_t = \beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} + \varepsilon_t$:

Фірма	y_t	K_t	L_t
1	867,2	861,3	579,3
2	911,4	894,8	682,7
3	778,6	822,9	424,4
4	944,6	908,9	715,9
5	977,9	946,5	904,1
6	826,6	840,6	494,5
7	896,7	878,2	627,3
8	933,6	899,3	686,3

Фірма	y_t	K_t	L_t
9	941,0	902,6	693,7
10	904,1	886,7	660,5
11	845,0	849,1	546,1
12	797,0	831,4	457,6
13	885,6	873,4	612,5
14	918,8	896,7	682,7
15	955,7	911,4	738,0

1. Обчислити коефіцієнт детермінації, скоригований коефіцієнт детермінації, вибірковий коефіцієнт кореляції між $\ln K$ та $\ln L$.
2. Оцініити регресію $\ln y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln K_t + \varepsilon_t$.
3. Перевірити наявність мультиколінеарності, $\alpha = 0,05$.

Задача 2.23. Відомо, що для фірми функція випуску може бути записана у вигляді: $y_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 a_t + \beta_3 a_t^2 + \varepsilon_t$, y_t – випуск продукції, p_t – ціна за одиницю, a_t – витрати на рекламу. Собівартість однієї одиниці продукції становить 1,8 грн. За наведеними спостереженнями

t	y_t	p_t	a_t
1	508	3,78	3,59
2	550	4,36	2,41
3	379	4,40	4,29
4	709	3,97	1,58
5	248	4,48	4,54
6	598	3,01	0,14
7	353	2,88	4,61

t	y_t	p_t	a_t
8	772	2,88	2,19
9	496	4,63	2,54
10	644	3,43	2,39
11	390	4,53	3,99
12	591	4,78	2,07
13	382	4,83	3,49
14	614	4,45	2,59

t	y_t	p_t	a_t
15	528	4,36	3,09
16	495	4,72	1,51
17	828	2,95	1,01
18	554	3,94	1,89
19	522	4,22	3,45
20	603	4,08	0,77

1. Оцінити регресію, перевірити значимість коефіцієнтів та адекватність моделі, $\alpha = 0,05$.
2. Визначити оптимальну ціну, якщо витрати на рекламу становитимуть 310 грн.
3. Знайти оптимальні видатки на рекламу, якщо конкурентна ціна одиниці продукції складає 5,9 грн.
4. Знайти максимальний прибуток фірми.

Задача 2.24. На основі статистичних даних , де y – прибуток комерційного підприємства, x_1, x_2, x_3 – фактори, від яких залежить прибуток цього підприємства,

y	x_1	x_2
36,39	56,54	35,70
39,08	57,87	43,42
40,38	63,44	44,06
41,20	69,18	46,23
41,67	73,46	55,74

y	x_1	x_2
41,25	81,39	61,47
40,98	84,48	66,37
40,78	91,81	75,59
40,06	98,32	76,96
37,39	102,30	78,90

знайти МНК оцінки параметрів регресії, якщо припустити, що вона має таку стохастичну залежність:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \varepsilon .$$

1. Перевірити модель на адекватність, $\alpha = 0,01$.
2. Якщо модель є адекватною, то знайти значення факторів, при яких прибуток комерційного підприємства буде максимальним.

Задача 2.25. На фірмі встановлено такі розміри зарплати y залежно від декількох факторів.

Посада	Заробітна плата, грн.	Стаж робити, років	Стать	Знання іноземної мови	Освіта, років навчання
Президент	2400	4	Ч	Ні	9
Віце-президент	2200	8	Ч	Так	15
Комерційний директор	1500	7	Ч	Так	16
Бухгалтер	1150	18	Ж	Ні	15
Помічник бухгалтера	670	4	Ж	Ні	14
Секретар	720	2	Ж	Ні	11
Юрист	1258	6	Ч	Ні	17
Менеджер	1206	3	Ч	Так	16
Менеджер	1413	5	Ж	Так	16
Менеджер	1087	2	Ж	Так	16
Прибиральник	298	12	Ж	Ні	9
Охоронець	480	2	Ч	Ні	12
Охоронець	480	2	Ч	Ні	12

1. Перевірте гіпотезу про залежність розміру заробітної плати від терміну навчання, $\alpha = 0,05$.
2. Перевірте гіпотезу про залежність розміру заробітної плати від стажу роботи на фірмі, $\alpha = 0,05$.
3. Перевірте гіпотезу про наявність статевої дискримінації на фірмі (чи заробляють чоловіки більше за жінок за однакових умов), $\alpha = 0,05$.

Задача 2.26. Директор заводу вважає, що доход його підприємства y може залежати від ціни продукції p, вартості капітального устаткування K, кількості робочої сили L, курсу гривні до долара e, капітальних інвестицій в галузь I.

Квартал	Доход, млн. грн., y	Ціна продукції, грн., p	Капітал, млн. грн., K	Робоча сила, тис. люд.-год., L	Курс гривні, грн./дол..США, e	Інвестиції, млн. грн., I
1997/Q1	0,751	2,10	103	204	185,74	112
1997/Q2	0,676	3,19	107	204	184,95	211
1997/Q3	2,204	3,71	108	207	185,79	401
1997/Q4	2,216	3,79	116	208	188,19	691
1998/Q1	2,433	4,04	117	214	196,66	209
1998/Q2	2,482	4,15	133	215	204,94	321
1998/Q3	2,502	4,23	130	217	235,69	345
1998/Q4	3,182	4,94	121	217	342,52	799
1999/Q1	3,472	4,97	144	217	355,69	223
1999/Q2	3,955	5,82	144	218	393,56	361
1999/Q3	4,143	6,59	145	218	430,69	483
1999/Q4	4,421	6,66	148	221	472,23	1039
2000/Q1	4,432	6,88	149	222	546,41	319
2000/Q2	5,054	7,57	153	224	541,35	482
2000/Q3	5,186	7,59	154	224	543,90	609
2000/Q4	5,276	7,77	160	226	543,87	1425
2001/Q1	5,368	7,93	162	227	543,14	473
2001/Q2	5,415	7,94	166	228	540,75	727
2001/Q3	5,954	9,01	167	229	535,23	899
2001/Q4	5,977	9,01	176	230	529,73	1109
2002/Q1	6,791	9,11	178	231	531,86	577
2002/Q2	7,042	9,18	183	232	532,82	872
2002/Q3	8,305	9,43	203	204	532,91	932
2002/Q4	8,565	9,53	221	204	533,10	2081

1. На основі аналізу діяльності підприємства в попередні роки допоможіть директору правильно специфікувати економетричну модель.
2. Визначіть найбільш впливові фактори, підрахувати відповідні коефіцієнти еластичності.

Задача 2.27. За даними ВВП України за 1993-2003 роки

Квартал	ВВП, млн. грн.
1993/Q1	53
1993/Q2	128
1993/Q3	470
1993/Q4	831
1994/Q1	1478
1994/Q2	1982
1994/Q3	2979
1994/Q4	5597
1995/Q1	8318
1995/Q2	10694
1995/Q3	16102
1995/Q4	19402
1996/Q1	16688
1996/Q2	17867
1996/Q3	22510
1996/Q4	24454
1997/Q1	18728
1997/Q2	20485
1997/Q3	26076
1997/Q4	28076
1998/Q1	20871
1998/Q2	23367

Квартал	ВВП, млн. грн.
1998/Q3	28908
1998/Q4	29447
1999/Q1	24980
1999/Q2	29196
1999/Q3	37633
1999/Q4	35317
2000/Q1	32309
2000/Q2	37889
2000/Q3	51238
2000/Q4	48634
2001/Q1	39201
2001/Q2	46481
2001/Q3	58999
2001/Q4	59509
2002/Q1	43699
2002/Q2	49893
2002/Q3	64081
2002/Q4	63259
2003/Q1	51206
2003/Q2	59937
2003/Q3	65413

1. Побудувати трендову модель $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$.
2. Розрахувати коефіцієнт детермінації.
3. Перевірити модель на адекватність, $\alpha = 0,05$.
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі, розбивши всі спостереження на групи розмірами $n_1 = 24$ та $n_2 = 19$ відповідно, $\alpha = 0,1$.
5. Розрахувати прогноз на четвертий квартал 2003 року. Визначте надійний інтервал для прогнозу, $\alpha = 0,05$.

Задача 2.28. На основі даних зовнішньоторговельної діяльності України

Квартал	Експорт товарів та послуг, млн. доларів США	Імпорт товарів та послуг, млн. доларів США
1997/Q1	4656	5403
1997/Q2	4995	5487
1997/Q3	5284	5296
1997/Q4	5420	4995
1998/Q1	4242	4918
1998/Q2	4688	4802
1998/Q3	4037	4358
1998/Q4	4654	4750
1999/Q1	3698	3817
1999/Q2	4047	3326
1999/Q3	4077	3692
1999/Q4	4412	4402
2000/Q1	4445	4468
2000/Q2	4456	3953
2000/Q3	5208	3975
2000/Q4	5139	5720
2001/Q1	4945	4749
2001/Q2	5374	5084
2001/Q3	5205	5030
2001/Q4	5562	5610
2002/Q1	5061	4664
2002/Q2	5522	5232
2002/Q3	6035	5630
2002/Q4	6733	5968
2003/Q1	6297	5573
2003/Q2	6785	6412

1. перевірте гіпотезу про вплив сезонного компонента на
   - експорт товарів та послуг;
   - імпорт товарів та послуг.
2. Зробити прогнози по зазначених змінних на 3 та 4 квартали 2003 року.
3. Перевірте гіпотезу про стійкість розглянутих моделей, розглянувши дані до і після 1999 року.

Тема 3. Модель лінійної регресії з гетероскедастичними збуреннями

Основні визначення

Вид моделі.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,k-1} + v_i, i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

в якій вектор збурень не задовольняє класичним властивостям збурень:

1. $Mv_i = 0$
2. Гетероскедастичність збурень: $Dv_i = Mv_i^2 = \sigma_i^2 \neq const, i = \overline{1,n}$.
3. Незалежність збурень: $\operatorname{cov}(v_i, v_j) = 0, i \neq j$.
4. Незалежність збурень та регресорів: $\operatorname{cov}(v_i, x_{ij}) = 0, \forall i, j$.
5. Збурення v_i нормально розподілені для всіх i.

Наслідки гетероскедастичності збурень на оцінки методу найменших квадратів:

1.Оцінки МНК будуть незміщеними, але не будуть ефективними (не матимуть найменшої дисперсії).

2.Стандартні оцінки коваріаційної матриці оцінки МНК будуть зміщеними, і, як наслідок, процедури перевірки гіпотез та інтервального оцінювання, основані на стандартних статистиках, будуть некоректними.

Критерії виявлення гетероскедастичності

Критерій Голдфелда-Квондта.

Нехай сукупність n спостережень упорядкована по мірі зростання однієї з незалежних змінних. Розіб'ємо її на дві групи об'ємами n_1 і n_2, виключивши приблизно чверть середніх значень. Побудуємо 2 регресії по перших

По кожній з груп будують регресію і знаходять відношення:

$$F_{pr} = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}.$$

Якщо вони менше 1, то групи міняють місцями. Це значення слід порівняти з теоретичним $F_{teor} = F(n_1 - k, n_2 - k, 1 - \alpha)$.

Якщо $F_{pr} < F_{teor}$, то збурення гомоскедастичні, в протилежному випадку – гетероскедастичні.

Критерій Глейзера.

Застосування цього критерію розглянемо на прикладі моделі

$$y_i = \alpha + \beta x_i + v_i, i = \overline{1,n}.$$

Спочатку оцінюється модель за методом найменших квадратів і знаходимо залишки $\hat{v}_i$, $i = \overline{1,n}$. Потім будується регресія модуля залишків відносно однієї з таких функцій:

$$|\hat{v}_i| = \gamma + \delta x_i + \varepsilon_i,$$

$$\left|\hat{v}_i\right| = \gamma + \delta\sqrt{\left|x_i\right|} + \varepsilon_i\,,$$

$$\left|\hat{v}_i\right| = \gamma + \delta\frac{1}{x_i} + \varepsilon_i\,,$$

$$\left|\hat{v}_i\right| = \gamma + \delta \ln\left|x_i\right| + \varepsilon_i \text{ тощо.}$$

Якщо хоча б одна з регресій виявиться адекватною, то гетероскедастичність наявна.

Критерій Уайта.

Спочатку оцінюється модель за методом найменших квадратів і знаходяться залишки $\hat{v}_i, i = \overline{1,n}$. Далі будується регресія квадратів залишків відносно всіх змінних з моделі, їх квадратів та попарних добутків. Наприклад, для моделі

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + v_i\,, i = \overline{1,n}$$

потрібно розглянути модель

$$\begin{aligned}\hat{v}_i = \beta_0 &+ \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \\ &+ \beta_4 x_{i1}^2 + \beta_5 x_{i2}^2 + \beta_6 x_{i3}^2 + \\ &+ \beta_7 x_{i1} x_{i2} + \beta_8 x_{i2} x_{i3} + \beta_9 x_{i1} x_{i3} + \varepsilon_i\,, i = \overline{1,n}\end{aligned}$$

Якщо така модель виявиться адекватною, то гетероскедастичність має місце.

Зважений метод найменших квадратів.

Припустимо, що коваріаційна матриця збурень відома з точністю до коефіцієнта пропорційності, тобто

$$Dv_i = \sigma^2 w_i^2\,, i = \overline{1,n}\,,$$

де w_i^2 – відомі, а σ^2 – невідомий коефіцієнт пропорційності.

В моделі (1) почленно розділимо i-те рівняння на w_i ($i = \overline{1,n}$):

$$y_i^* = \beta_0 x_{i0}^* + \beta_1 x_{i1}^* + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,k-1}^* + \varepsilon_i\,, i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

де

$$y_i^* = \frac{y_i}{w_i}\,, i = \overline{1,n}\,,$$

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij}}{w_j}\,, j = \overline{0,k-1}, i = \overline{1,n}\,,$$

$$\varepsilon_i = \frac{\upsilon_i}{w_i}\,, i = \overline{1,n}\,.$$

Оцінкою зваженого МНК коефіцієнтів моделі з гетероскедастичними збуреннями називається оцінка звичайного МНК, знайдена за моделлю (2).

Обчислення вагів на основі критерію Глейзера.

Для обчислення вагів використовується адекватна допоміжна регресія з найбільшим коефіцієнтом детермінації, наприклад,

$$\hat{w}_i = \hat{\gamma} + \hat{\delta}\sqrt{x_i}\,, i = \overline{1, n}.$$

Обчислення вагів на основі критерію Уайта.

Якщо допоміжна регресія виявилася адекватною, то

$$\hat{w}_i = \sqrt{\hat{v}_i^2}\,, i = \overline{1, n}.$$

Приклад розв'язання задачі

Приклад 1.

Відомі доходи та витрати на споживання 30 сімей одного будинку.

C	Y	C	Y	C	Y
190,1	210,5	250,9	269,0	287,1	408,2
200,1	220,6	234,1	283,3	390,7	419,5
221,7	225,3	271,9	294,8	490,3	450,9
227,3	237,7	285,8	308,9	504,5	467,7
208,1	243,4	380,5	312,0	338,5	471,3
215,5	246,2	267,5	314,3	496,6	498,5
230,9	246,7	322,1	328,0	461,2	502,8
211,1	252,8	375,3	377,7	521,4	514,8
230,3	255,3	297,1	405,8	482,1	545,3
259,2	267,0	372,2	406,0	452,6	627,6

1. Побудувати регресію виду $C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + v_i$.
2. Перевірити наявність гетероскедастичності збурень за критерієм Голдфелда-Квондта.
3. Перевірити наявність гетероскедастичності збурень за критерієм Глейзера.
4. Перевірити наявність гетероскедастичності збурень за критерієм Уайта.
5. У випадку наявності гетероскедастичності оцінити модель за зваженим методом найменших квадратів.

Розв'язок.

1. Використовуючи звичайний МНК знаходимо вигляд вибіркової регресійної функції: $\hat{C}_i = 23,3 + 0,85Y_i$, $R^2 = 0,81$.
2. Побудуємо окремо 2 регресії по перших $\frac{4}{15} \cdot 30 = 8$ та останніх 8 спостереженнях, попередньо відсортувавши всі спостереження за зростанням незалежної змінної. Регресія по перших 8 спостереженнях має вигляд $\hat{C}_i = 82,3 + 0,56Y_i$, $R^2 = 0,60$, $\hat{\sigma}^2 = 11,87$. Регресія по останніх 8 спостереженнях має вигляд $\hat{C}_i = 449,5 + 0,04Y_i$, $R^2 = 0,04$, $\hat{\sigma}^2 = 61,53$.

Знаходимо $F_{pr} = \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2} = \frac{11,87}{61,53} = 0,19$. Оскільки $F_{pr} < 1$, то дріб необхідно перевернути, таким чином, $F_{pr} = \frac{\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_1} = \frac{61,53}{11,87} = 5,18$. Це значення більше за теоретичне $F_{teor} = F\left(6;6;0,95\right) = 4,28$. Робимо висновок, що гетероскедастичність присутня.

3. Для застосування критерію Глейзера необхідно знайти модуль вектора залишків: $\left|\hat{v}_i\right| = \left|C_i - \hat{C}_i\right| = \left|C_i - 23,3 - 0,85Y_i\right|$. Будуємо та оцінюємо допоміжні регресії:

$\left\|\hat{v}_i\right\| = -28,0 + 0,17Y_i$	$R^2 = 0,344$
$\left\|\hat{v}_i\right\| = -90,2 + 6,60\sqrt{Y_i}$	$R^2 = 0,348$
$\left\|\hat{v}_i\right\| = 97,2 - 20853 \cdot \frac{1}{Y_i}$	$R^2 = 0,341$
$\left\|\hat{v}_i\right\| = 2,96 + 0,0002Y_i^2$	$R^2 = 0,328$
$\left\|\hat{v}_i\right\| = -330,53 + 62,35\ln Y_i$	$R^2 = 0,348$

Найбільший коефіцієнт детермінації у останньої моделі. Вона адекватна, оскільки практичне значення $F_{pr} = 13,67$ перевищує теоретичне $F_{teor} = F\left(1;28;0,95\right) = 4,20$.
Таким чином, за критерієм Глейзера гетероскедастичність присутня.

4. Будуємо допоміжну модель квадрату залишків
$\hat{v}_i^2 = \left(C_i - \hat{C}_i\right)^2 = \left(C_i - 23,3 - 0,85Y_i\right)^2$
від незалежної змінної та її квадрату:
$\hat{v}_i^2 = -2485,8 + 9,75Y_i + 0,008Y_i^2, R^2 = 0,344$.
Модель виявляється адекватною, оскільки практичне значення $F_{pr} = 7,07$ перевищує теоретичне $F_{teor} = F\left(2;27;0,95\right) = 3,35$. Таким чином, за критерієм Глейзера гетероскедастичність присутня.
5. Оскільки виявлено гетероскдастичність, то модель необхідно оцінювати за зваженим методом найменших квадратів. Для цього слід знайти оцінки вагів w_i. За методом Глейзера вони знаходяться за формулою $\hat{w}_i = -330,53 + 62,35\ln Y_i$,
а за критерієм Уайта – $\hat{w}_i = \sqrt{\left|-2485,8 + 9,75Y_i + 0,008Y_i^2\right|}$.
Знаходимо нові змінні $C_i^* = \frac{C_i}{w_i}, Y_i^* = \frac{Y_i}{w_i}$.

Метод Глейзера			Метод Уайта		
W	C*	Y*	W	C*	Y*
3,00	63,30	70,10	7,77	24,45	27,07
5,92	33,77	37,23	8,64	23,16	25,53
7,24	30,63	31,13	11,75	18,87	19,18
10,57	21,49	22,48	17,52	12,97	13,57
12,06	17,26	20,18	19,65	10,59	12,39
12,77	16,87	19,27	20,61	10,46	11,94
12,89	17,91	19,13	20,77	11,12	11,88
14,42	14,64	17,53	22,73	9,29	11,12
15,03	15,32	16,98	23,49	9,80	10,87
17,83	14,54	14,98	26,78	9,68	9,97
18,29	13,72	14,71	27,31	9,19	9,85
21,53	10,88	13,16	30,86	7,59	9,18
24,01	11,33	12,28	33,47	8,12	8,81
26,91	10,62	11,48	36,44	7,84	8,47
27,53	13,82	11,33	37,08	10,26	8,41
28,00	9,55	11,23	37,55	7,12	8,37
30,66	10,51	10,70	40,22	8,01	8,16
39,46	9,51	9,57	48,96	7,67	7,71
43,93	6,76	9,24	53,44	5,56	7,59
43,95	8,47	9,24	53,47	6,96	7,59
44,29	6,48	9,22	53,81	5,34	7,59
46,00	8,49	9,12	55,54	7,04	7,55
50,50	9,71	8,93	60,18	8,15	7,49
52,78	9,56	8,86	62,56	8,06	7,48
53,25	6,36	8,85	63,06	5,37	7,47
56,75	8,75	8,78	66,82	7,43	7,46
57,30	8,05	8,78	67,40	6,84	7,46
58,77	8,87	8,76	69,02	7,55	7,46
62,35	7,73	8,75	73,02	6,60	7,47
71,11	6,36	8,82	83,33	5,43	7,53

Оцінюємо регресію $C_i^* = \beta_0 + \beta_1 Y_i^* + \varepsilon_i$:

За методом Глейзера	За методом Уайта
$C_i^* = 0,10 + 0,909 Y_i^*, R^2 = 0,99$.	$C_i^* = -0,001 + 0,917 Y_i^*, R^2 = 0,98$.

Як бачимо, остаточні оцінки, знайдені за зваженим методом найменших квадратів значно відрізняються від оцінок звичайного МНК. Зокрема, побудовані регресії свідчать, що в сім'ях витрачається 91% доходів на споживання, тоді як оцінки звичайного МНК показували лише 85%.

Задачі

Група А

Задача 3.1. Довести, що для регресії $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + v_t$, де $Dv_t \neq const$, дисперсія оцінки $\hat{\beta}_1$, отримана за допомогою зваженого методу найменших квадратів менша дисперсії МНК-оцінки.

Задача 3.2. При побудові регресії $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + v_t$ був отриманий такий вектор залишків:

t	$\hat{v}_t$
1	-0,50
2	-1,68
3	0,41
4	1,68
5	1,62
6	1,93

t	$\hat{v}_t$
7	-2,04
8	-0,39
9	1,53
10	-1,52
11	-1,07
12	-1,91

t	$\hat{v}_t$
13	0,95
14	-3,46
15	2,84
16	4,38
17	-4,59
18	2,23

t	$\hat{v}_t$
19	3,82
20	-1,76
21	2,48
22	3,57
23	4,47
24	3,44

Перевірити наявність гетероскедастичності залишків за критерієм Голдфелда-Квондта, розбивши всі спостереження на 2 групи по 8 елементів в кожній, $\alpha = 0,01$.

Задача 3.3. Відомі спостереження за величинами x_1, x_2 та y.

y	x_1	x_2
11	1	4
27	4	8
23	5	6
26	3	8
27	6	7
21	3	7
21	5	5

Оцінити регресію $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + v_t$, якщо оцінка коваріаційної матриці має вигляд:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Група Б

Задача 3.4. Відома статистична інформація про змінні y та x:

y	x
7,11	9,73
13,32	16,53
14,04	19,28
10,97	20,15
17,08	23,74
15,78	23,87
19,09	25,55
17,23	25,80
16,41	27,89

y	x
23,70	28,81
15,44	29,29
19,94	30,46
24,25	31,40
19,38	31,63
24,57	32,29
23,97	34,02
24,83	34,03
10,28	34,32

y	x
22,97	36,70
32,31	36,97
29,50	39,05
38,07	39,26
20,65	39,85
23,76	40,50
27,64	42,31

1. Перевірити наявність гетероскедастичності залишків для моделі $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + v_t$ за критеріями $(\alpha = 0,01)$:
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність виявлено, то оцінити модель за зваженим методом найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Задача 3.5. Відома статистична інформація про змінні y та x:

y	x
7,16	8,96
14,75	18,83
12,58	19,02
17,75	20,91
17,23	23,16
17,39	23,89
20,54	24,79
16,90	24,90
19,14	26,14

y	x
18,07	27,25
18,03	27,56
16,90	29,05
18,70	29,30
15,08	30,30
23,38	30,33
13,85	30,71
19,48	30,86
21,76	32,05

y	x
18,49	33,40
19,82	33,43
22,07	34,32
25,95	36,10
16,18	36,27
16,17	39,60
37,69	41,31

1. Перевірити наявність гетероскедастичності залишків для моделі $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + v_t$ за критеріями $(\alpha = 0,01)$:
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.

2. Якщо гетероскедастичність виявлено, то оцінити модель за зваженим методом найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі

- Глейзера;
- Уайта.

Задача 3.6. На основі даних задачі 1.15

1. визначити наявність гетероскедастичності за критеріями ($\alpha = 0,01$):
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність присутня, то оцінити модель за допомогою зваженого методу найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Задача 3.7. На основі даних задачі 1.16

1. визначити наявність гетероскедастичності за критеріями ($\alpha = 0,05$):
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність присутня, то оцінити модель за допомогою зваженого методу найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Задача 3.8. На основі даних задачі 1.18

1. визначити наявність гетероскедастичності за критеріями ($\alpha = 0,1$):
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність присутня, то оцінити модель за допомогою зваженого методу найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Задача 3.9. На основі даних задачі 1.20

1. визначити наявність гетероскедастичності за критеріями ($\alpha = 0,05$):
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність присутня, то оцінити модель за допомогою зваженого методу найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Задача 3.10. На основі даних задачі 2.20

1. визначити наявність гетероскедастичності за критеріями ($\alpha = 0,05$):
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність присутня, то оцінити модель за допомогою зваженого методу найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Задача 3.11. На основі даних задачі 2.27

1. визначити наявність гетероскедастичності за критеріями ($\alpha = 0,1$):
   - Голдфелда-Квондта;
   - Глейзера;
   - Уайта.
2. Якщо гетероскедастичність присутня, то оцінити модель за допомогою зваженого методу найменших квадратів, використовуючи оцінки вагів у формі
   - Глейзера;
   - Уайта.

Тема 4. Модель лінійної регресії з автокорельованими збуреннями

Основні визначення

Вид моделі.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,k-1} + v_i \,, i = \overline{1,n} \,,$$

в якій вектор збурень не задовольняє класичним властивостям збурень:

1. $\mathsf{M} v_i = 0$
2. Гомоскедастичність: $\mathsf{D} v_i = \mathsf{M} v_i^2 = \sigma^2 = const \,, i = \overline{1,n}$.
3. Залежність збурень: $\operatorname{cov}\left(v_i, v_j\right) \neq 0$.
4. Незалежність збурень та регресорів: $\operatorname{cov}\left(v_i, x_{ij}\right) = 0, \forall\, i,\, j$.
5. Збурення v_i нормально розподілені для всіх *i*.

Наслідки автокорельованості збурень на оцінки методу найменших квадратів:

1.Оцінки МНК будуть незміщеними, але не будуть ефективними (не матимуть найменшої дисперсії).

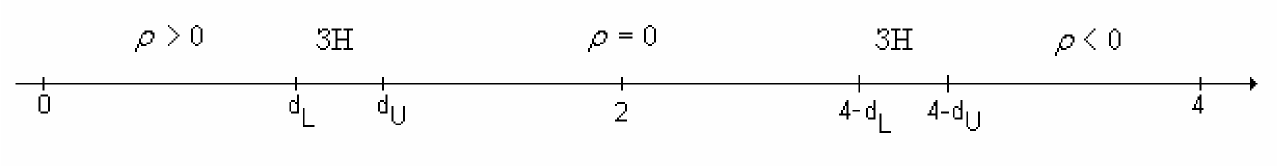
2.Стандартні оцінки коваріаційної матриці оцінки МНК будуть зміщеними, і, як наслідок, процедури перевірки гіпотез та інтервального оцінювання, основані на стандартних статистиках, будуть некоректними.

Критерій визначення автокорельованості збурень Дарбіна-Уотсона.

Підраховується практичне значення статистики Дарбіна-Уотсона

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n} (\hat{v}_i - \hat{v}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i^2} .$$

З таблиці Дарбіна-Уотсона знаходиться два числа d_L та d_U . В залежності від розташування точок на координатній прямій робиться висновок.



Робимо висновок за таким правилом:

Якщо $d < d_L$, то має місце автокореляція з додатнім ρ.

Якщо $d_L < d < d_U$, то ми не можемо зробити ніякого висновку, і цей інтервал називається зоною невизначеності (ЗН).

Якщо $d_U < d < 4 - d_U$, то автокореляція відсутня.

Якщо $4 - d_U < d < 4 - d_L$, то ми не можемо зробити ніякого висновку. Цей інтервал також є зоною невизначеності (ЗН).

Якщо $4 - d_L < d < 4$, то має місце автокореляція з від'ємним ρ.

На практиці, якщо вибіркове значення d потрапляє до зони невизначеності (ЗН), то вважають, що має місце автокореляція.

Узагальнений метод найменших квадратів.

Будемо вважати, що для регресії

$$y = X\beta + v \qquad (1)$$

кореляційна матриця Σ відома.

Введемо наступні позначення:

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} y = y^*,$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} X = X^*,$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} v = \varepsilon.$$

З урахуванням уведених позначень маємо:

$$y^* = X^*\beta + \varepsilon \qquad (2).$$

Оцінкою узагальненого МНК коефіцієнтів моделі (1) називається оцінка звичайного МНК, знайдена за моделлю (2).

Процес авторегресії першого порядку AR(1).

$v_i = \rho v_{i-1} + \varepsilon_i, i = \overline{1, n}$.

У випадку AR(1)–збурень кореляційна матриця Σ записується у вигляді

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdot & \cdot & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdot & \cdot & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdot & \cdot & \rho^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Це дає можливість знайти змінні для узагальненого методу найменших квадратів у явному вигляді:

$$y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\, y_1,$$

$$y_i^* = y_i - \rho y_{i-1}, 2 \le i \le n.$$

$$x_{1j}^* = \sqrt{1-\rho^2}\, x_{1j},$$

$$x_{ij}^* = x_{ij} - \rho x_{i-1,j}, 2 \le i \le n. \qquad (*)$$

Якщо у вихідній моделі є постійний доданок, то перетворена модель не матиме константи. Замість неї з'явиться змінна x_0^*, значення якої дорівнюють

$$x_{10}^* = \sqrt{1-\rho^2},$$

$$x_{i0}^* = 1-\rho, 2 \le i \le n.$$

Оцінка параметра ρ.

Вибірковий коефіцієнт кореляції залишків методу найменших квадратів

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{v}_i \hat{v}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i^2}.$$

Оцінка Дарбіна-Уотсона.

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2}.$$

Метод Дарбіна.

Формула (*) записується у вигляді

$$y_t = \beta_1 \left(1 - \rho\right) + \rho y_{t-1} + \beta_2 x_{t,2} - \rho\beta_2 x_{t-1,2} + \ldots + \beta_{k-1} x_{t,k-1} - \rho\beta_{k-1} x_{t,k-1} + v_t,$$

тобто y_{t-1} включається в число регресорів, а ρ – в число параметрів, що оцінюються. Для цієї регресії за допомогою звичайного МНК знаходяться оцінки $\hat{\rho}$ та $\hat{\theta}_j$ параметрів ρ та $\rho\beta_j$ відповідно. В якості оцінки $\hat{\beta}_j$ беруть $\frac{\hat{\theta}_j}{\hat{\rho}}$. Можна покращити якість оцінок $\hat{\beta}_j$, підставивши отримане значення $\hat{\rho}$ до (*), і знайти нові МНК-оцінки параметрів $\hat{\beta}_j$.

Метод Кочрейна-Оркатта.

Ітеративно обраховуються формули (*), залишки за узагальненим методом найменших квадратів, поки не буде досягнуто необхідної точності.

Метод Хілдрета-Лу.

Обчислюється модель при всіх ρ з інтервалу від -1 до 1 з кроком 0.01. Вибирається те значення, при якому сума квадратів відхилень в узагальненому методі найменших квадратів мінімальна.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 1.

На базі даних по грошовій масі М2 та ВВП України побудувати модель $\ln M_i = \beta_0 + \beta_1 \ln Y_i + v_i$, перевіривши залишки на наявність автокореляції.

Квартали	Грошова маса М2, млн.грн.	ВВП, млн. грн.	$\ln M$	$\ln Y$
1993/Q1	47	53	3,85	3,97
1993/Q2	79	128	4,37	4,85
1993/Q3	260	470	5,56	6,15
1993/Q4	386	831	5,96	6,72
1994/Q1	574	1478	6,35	7,30
1994/Q2	927	1982	6,83	7,59
1994/Q3	1596	2979	7,38	8,00

Квартали	Грошова маса М2, млн.грн.	ВВП, млн. грн.	$\ln M$	$\ln Y$
1994/Q4	2163	5597	7,68	8,63
1995/Q1	2681	8318	7,89	9,03
1995/Q2	3845	10694	8,25	9,28
1995/Q3	4645	16102	8,44	9,69
1995/Q4	5269	19402	8,57	9,87
1996/Q1	5562	16688	8,62	9,72
1996/Q2	6077	17867	8,71	9,79

Квартали	Грошова маса М2, млн.грн.	ВВП, млн. грн.	$\ln M$	$\ln Y$
1996/Q3	6220	22510	8,74	10,02
1996/Q4	7306	24454	8,90	10,10
1997/Q1	8040	18728	8,99	9,84
1997/Q2	9279	20485	9,14	9,93
1997/Q3	10464	26076	9,26	10,17
1997/Q4	10775	28076	9,28	10,24
1998/Q1	10973	20983	9,30	9,95
1998/Q2	11269	23440	9,33	10,06

Квартали	Грошова маса М2, млн.грн.	ВВП, млн. грн.	$\ln M$	$\ln Y$
1998/Q3	10873	29516	9,29	10,29
1998/Q4	12175	29930	9,41	10,31
1999/Q1	11976	25157	9,39	10,13
1999/Q2	14242	30110	9,56	10,31
1999/Q3	15360	37057	9,64	10,52
1999/Q4	16820	34802	9,73	10,46

Розв'язок.

Перетворюємо вхідну інформацію, знайшовши логарифми від початкових даних. За звичайним МНК оцінюємо модель $\ln M_i = \beta_0 + \beta_1 \ln Y_i + v_i$:

$$\ln M_i = -0,027 + 0,906 \ln Y_i.$$

Знаходимо вектор залишків

$$\hat{v}_i = \ln M_i + 0,027 - 0,906 \ln Y_i.$$

Обраховуємо статистику Дарбіна-Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n} (\hat{v}_i - \hat{v}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i^2} = \frac{0,747}{1,101} = 0,678$$

Це значення менше за критичні значення статистики Дарбіна-Уотсона $d_L = 1,33$, $d_U = 1,48$, тому робимо висновок про наявність додатної автокореляції.

Оцінимо коефіцієнт кореляції:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2} = 0,661.$$

Обраховуємо скориговані значення змінних за формулами:

$$\ln M_1^* = \sqrt{1-\rho^2} \ln M_1,$$

$$\ln M_i^* = \ln M_i - \rho \ln M_{i-1}, 2 \le i \le 28.$$

$$Y_1^* = \sqrt{1-\rho^2} Y_1,$$

$$Y_i^* = Y_i - \rho Y_{i-1,j}, 2 \le i \le 28.$$

$$C_1^* = \sqrt{1-\rho^2},$$

$$C_i^* = 1 - \rho, 2 \le i \le 28.$$

Квартали	M*	C*	Y*
1993/Q1	2,89	0,75	2,98
1993/Q2	1,82	0,34	2,23
1993/Q3	2,67	0,34	2,95
1993/Q4	2,28	0,34	2,66
1994/Q1	2,42	0,34	2,86
1994/Q2	2,63	0,34	2,77
1994/Q3	2,86	0,34	2,98
1994/Q4	2,81	0,34	3,34
1995/Q1	2,82	0,34	3,32
1995/Q2	3,04	0,34	3,31
1995/Q3	2,99	0,34	3,56
1995/Q4	2,99	0,34	3,47
1996/Q1	2,96	0,34	3,20
1996/Q2	3,01	0,34	3,37

Квартали	M*	C*	Y*
1996/Q3	2,98	0,34	3,55
1996/Q4	3,12	0,34	3,48
1997/Q1	3,11	0,34	3,16
1997/Q2	3,19	0,34	3,43
1997/Q3	3,22	0,34	3,61
1997/Q4	3,17	0,34	3,52
1998/Q1	3,17	0,34	3,18
1998/Q2	3,18	0,34	3,49
1998/Q3	3,13	0,34	3,64
1998/Q4	3,26	0,34	3,50
1999/Q1	3,17	0,34	3,32
1999/Q2	3,36	0,34	3,62
1999/Q3	3,32	0,34	3,70
1999/Q4	3,36	0,34	3,50

За наведеними даними оцінюємо модель $\ln M_i^* = \beta_0 C_i^* + \beta_1 \ln Y_i^* + \varepsilon_i$:
$\ln M_i^* = 0,376 C_i^* + 0,864 \ln Y_i^*$, $R^2 = 0,81$.

Модель є значимою, оскільки $F_{pr} = 54,78$ значно перевищує $F_{teor} = F(1;26;0,95) = 4,23$.

Таким чином, кінцева модель має вигляд: $\ln M_i = 0,376 + 0,864 \ln Y_i$.

Задачі

Група А

Задача 4.1. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію та коваріацію першого порядку для стаціонарного $AR(1)$ процесу $y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Задача 4.2. Обчислити коваріації перших чотирьох порядків для $AR(1)$ процесу $y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Задача 4.3. Обчислити коваріаційну матрицю для процесу AR(2).

Задача 4.4. Збурення моделі $y_t = \beta x_t + v_t$ підпорядковані процесу авторегресії першого порядку $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$. Пропонується оцінити коефіцієнт β з регресії $\Delta y_t = \beta \cdot \Delta x_t + \varepsilon_t$.

1. Показати, що така оцінка є лінійною та незміщеною.
2. Обчислити дисперсію цієї оцінки та показати, що стандартна оцінка цієї дисперсії є зміщеною.

Задача 4.5. Показати, що для регресії $y = X\beta + v$ з автокорельованими збуреннями першого порядку $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$ найкращим прогнозом на наступний період буде

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}^T \hat{\beta} + \hat{\rho}\left(y_n - x_n^T \hat{\beta}\right),$$

де x_{n+1}^T – вектор незалежних змінних у період $n+1$, $\hat{\beta}$ – оцінка коефіцієнта β, $\hat{\rho}$ – оцінка коефіцієнта кореляції.

Задача 4.6. Для моделі $y_i = \alpha + \beta x_i + v_i$ обраховані оцінки залишків:

$\hat{v}_i$	-0,1	0,5	-0,2	1,4	1,4	0,9	-0,2	0,1	0,7

Перевірити модель на наявність автокореляції збурень.

Задача 4.7. Для моделі $y_i = \alpha + \beta x_i + v_i$ обраховані оцінки залишків:

$\hat{v}_i$	0,8	-0,5	0,4	-0,9	0,7	0,4	-0,5	-0,2	0,4

Перевірити модель на наявність автокореляції збурень.

Задача 4.8. На основі 30 спостережень була оцінена модель $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + v_t$:

$$y_t = 2,1 + 0,7x_t,$$

обраховано значення статистика Дарбіна-Уотсона $d = 0,72$. Визначити найкращий прогноз $\hat{y}_{31}$.

Група Б

Задача 4.9. Для поданих даних оцінити параметри макроекономічної виробничої функції Коба-Дугласа.

$\ln L$	$\ln K$	$\ln Y$
10,88	16,40	25,30
10,20	18,63	23,06
11,28	20,00	25,34
11,64	20,74	26,21
12,37	20,71	26,04
12,04	20,61	25,34
11,84	20,84	25,25
12,73	24,02	27,46

$\ln L$	$\ln K$	$\ln Y$
14,31	23,40	29,26
14,09	27,31	30,36
13,62	26,40	29,33
13,77	32,33	32,38
14,81	35,53	35,33
15,04	36,82	35,73
17,38	36,51	40,57

1. За допомогою критерію Дарбіна-Уотсона перевірити гіпотезу про відсутність автокореляції збурень, $\alpha = 0,05$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити модель за допомогою узагальненого методу найменших квадратів.

Задача 4.10. По наведених даних (2000 рік)

Споживання, грн., C	Доход, грн., Y
98,75	110,34
101,35	116,04
104,53	123,22
110,74	130,05
110,01	129,12
110,61	130,71
111,88	130,90
113,30	132,45
113,53	136,83
115,91	139,13

Споживання, грн., C	Доход, грн., Y
114,49	133,27
115,46	132,81
120,27	139,54
116,45	137,96
118,94	141,47
118,06	142,67
123,51	146,40
127,14	149,35
135,49	158,43
140,97	164,43

побудувати залежність $C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + v_i$.

1. Перевірити наявність автокореляції, $\alpha = 0,01$.
2. В разі наявності автокореляції застосувати узагальнений метод найменших квадратів для оцінки моделі.

Задача 4.11. Оцінити параметри функції $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + v_i$, де y – доход підприємства, x – витрати підприємства.

Доход підприємства, y	Витрати підприємства, x
44,14	39,61
45,79	41,28
44,14	39,44
44,93	40,88
47,69	41,69
50,13	43,27
52,14	47,31
50,93	45,60
51,56	46,47
55,08	47,45
55,85	50,04

Доход підприємства, y	Витрати підприємства, x
60,33	55,30
63,64	58,43
66,12	60,37
64,52	58,71
64,22	56,65
64,60	56,59
63,45	55,49
60,65	52,91
62,58	54,31

1. За допомогою критерію Дарбіна-Уотсона перевірити гіпотезу про відсутність автокореляції збурень, $\alpha = 0,01$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ
   - методом Дарбіна-Уотсона;
   - методом сіткового пошуку.

Задача 4.12. За даними задачі 1.15

1. визначити наявність автокореляції залишків, $\alpha = 0,01$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ методом Дарбіна-Уотсона.

Задача 4.13. За даними задачі 1.16

1. визначити наявність автокореляції залишків, $\alpha = 0,05$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ методом Дарбіна.

Задача 4.14. За даними задачі 1.18

1. визначити наявність автокореляції залишків, $\alpha = 0,01$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ методом Дарбіна-Уотсона.

Задача 4.15. За даними задачі 1.20

1. визначити наявність автокореляції залишків, $\alpha = 0,01$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ методом Кочрейна-Оркатта.

Задача 4.16. За даними задачі 2.20

1. визначити наявність автокореляції залишків, $\alpha = 0,01$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ методом Дарбіна.

Задача 4.17. За даними задачі 2.27

1. визначити наявність автокореляції залишків, $\alpha = 0,01$.
2. У випадку наявності автокореляції оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, оцінивши параметр ρ методом Дарбіна-Уотсона.

Тема 5. Системи одночасних рівнянь

Основні визначення

Опис моделі.

Системою взаємопов'язаних одночасних економетричних рівнянь називається система, в якій одні і ті ж залежні змінні в одних рівняннях входять до лівої частини, а в інших – до правої частини. Наприклад, в моделі Клейна

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 \left(W_t^p + W_t^g\right) + \varepsilon_{1t}, \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\ W_t^p = \gamma_0 + \gamma_1 X_t + \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + \varepsilon_{3t}, \\ X_t = C_t + I_t + G_t, \\ P_t = X_t - T_t - W_t^p, \\ K_t = K_{t-1} + I_t, \end{cases}$$

де I_t – інвестиції, C_t – споживання, X_t – чистий експорт, W_t^p – зарплата у приватному секторі, W_t^g – зарплата у державному секторі, G_t – державні видатки, що не включають зарплату, P_t – доход від приватного сектора, K_t – капітал, Y_t – ВВП країни у період t, A_t – тренд.

Структурний вигляд системи одночасних рівнянь.

У структурному вигляді системи одночасних рівнянь кожне рівняння відображає певний елемент структури економічної системи, що розглядається, і має економічну інтерпретацію.

Зведений вигляд системи одночасних рівнянь.

У зведеному вигляді в кожному рівнянні зліва стоїть ендогенна змінна, а справа – лише екзогенні змінні.

Ендогенні змінні – взаємозалежні змінні, які визначаються всередині моделі.

Екзогенні змінні – незалежні змінні, які визначаються зовні системи. До групи предетермінованих змінних також включають лагові значення ендогенних змінних (значення ендогенних змінних в попередні моменти часу).

Необхідна умова ідентифікації.

$D + 1 = H$ – рівняння ідентифіковане,

$D + 1 < H$ – рівняння неідентифіковане,

$D + 1 > H$ – рівняння надідентифіковане,

де D – кількість предетермінованих змінних, що відсутні в рівнянні, але присутні в системі,

H – кількість ендогенних змінних в рівнянні.

Достатня умова ідентифікації.

Визначник матриці, складений з коефіцієнтів при змінних, відсутніх в даному рівнянні, не рівний 0, а ранг цієї матриці не менший числа ендогенних змінних системи без одиниці.

Непрямий метод найменших квадратів.

Використовується для оцінки ідентифікованих рівнянь.

1. Складається зведений вигляд моделі і визначаються її коефіцієнти за допомогою звичайного МНК.
2. Шляхом алгебраїчних перетворень повертаються до структурного вигляду системи одночасних рівнянь, отримуючи оцінки структурних параметрів.

Двоетапний метод найменших квадратів.

Використовується для оцінки надідентифікованих рівнянь.

1. **З**а допомогою звичайного методу найменших квадратів оцінюється регресія кожної ендогенної змінної відносно набору всіх екзогенних змінних системи.
2. Замість ендогенних змінних, що входять у праву частину рівняння, підставляються їх оцінки, знайдені на першому етапі. Одержані рівняння оцінюються за допомогою звичайного методу найменших квадратів.

Приклад розв'язання задачі

Приклад 1.

Провести ідентифікацію та оцінку моделі грошового ринку України

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 M_t + \varepsilon_{1t},$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 G_t + \varepsilon_{2t},$$

$$I_t = \gamma_0 + \gamma_1 R_t + \varepsilon_{3t},$$

на підставі даних за 1998-2003 роки (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Рік	Квартал	ВВП, млн. грн.	Інвестиції, млн. грн.	Державні витрати, млн. грн.	М2, млн. грн.	Облікова ставка НБУ на кінець періоду, %
1998	1	20871	1744	6720	12835	35
	2	23367	2675	7384	13257	41
	3	28908	2877	8210	14142	51
	4	29447	6662	8952	15432	82
1999	1	24980	1861	6245	15631	60
	2	29196	3006	7737	18258	60
	3	37633	4023	9672	20019	45
	4	35317	8662	9677	21714	45
2000	1	32309	2659	7980	23275	32
	2	37889	4018	10609	26359	29
	3	51238	5073	13271	28076	27
	4	48634	11879	13763	31544	27

Рік	Квартал	ВВП, млн. грн.	Інвестиції, млн. грн.	Державні витрати, млн. грн.	М2, млн. грн.	Облікова ставка НБУ на кінець періоду, %
2001	1	39201	3945	10506	32531	25
	2	46481	6062	12782	36552	19
	3	58999	7493	15163	39292	15
	4	59509	9244	16186	45186	12,5
2002	1	43699	4805	12017	47032	11,5
	2	49893	7268	14070	51056	10
	3	64081	7766	16853	57618	8
	4	63259	17339	17270	64321	7
2003	1	51206	6124	13518	69552	7
	2	59937	9879	16603	78477	7
	3	65413	11410	18250	85849	7

Розв'язок.

Для того, щоб змінні були співставними, візьмемо логарифми від відповідних величин:

ВВП, Y	Інвестиції, I	Державні витрати, G	Грошова маса, M	Облікова ставка, R
9,95	7,46	8,81	9,46	0,35
10,06	7,89	8,91	9,49	0,41
10,27	7,96	9,01	9,56	0,51
10,29	8,80	9,10	9,64	0,82
10,13	7,53	8,74	9,66	0,60
10,28	8,01	8,95	9,81	0,60
10,54	8,30	9,18	9,90	0,45
10,47	9,07	9,18	9,99	0,45
10,38	7,89	8,98	10,06	0,32
10,54	8,30	9,27	10,18	0,29
10,84	8,53	9,49	10,24	0,27
10,79	9,38	9,53	10,36	0,27
10,58	8,28	9,26	10,39	0,25
10,75	8,71	9,46	10,51	0,19
10,99	8,92	9,63	10,58	0,15
10,99	9,13	9,69	10,72	0,13
10,69	8,48	9,39	10,76	0,12
10,82	8,89	9,55	10,84	0,10
11,07	8,96	9,73	10,96	0,08
11,05	9,76	9,76	11,07	0,07
10,84	8,72	9,51	11,15	0,07
11,00	9,20	9,72	11,27	0,07
11,09	9,34	9,81	11,36	0,07

В нашій моделі присутні три ендогенні змінні Y, R, I та 2 екзогенні змінні M, G. Проведемо ідентифікацію кожного з рівнянь.

Перше рівняння. Кількість включених ендогенних змінних $H = 2$, не включена одна екзогенна змінна G, тому $D = 1$. Таким чином $H = D + 1$, рівняння є строго ідентифікованим.

Друге рівняння. Кількість включених ендогенних змінних $H = 2$, не включена одна екзогенна змінна M, тому $D = 1$. Таким чином $H = D + 1$, рівняння є строго ідентифікованим.

Третє рівняння. Кількість включених ендогенних змінних $H = 2$, не включено дві екзогенні змінні M, G, тому $D = 2$. Таким чином $H < D + 1$, рівняння є надідентифікованим.

Перевіримо для кожного рівняння достатню умову ідентифікації. Для цього складемо матрицю коефіцієнтів при змінних моделі:

	Y	R	I	M	G
1 рівняння	α_1	-1	0	α_2	0
2 рівняння	-1	0	β_1	0	β_2
3 рівняння	0	γ_1	-1	0	0

У відповідності до достатньої умови ідентифікації визначник матриці коефіцієнтів при змінних, що не входять до досліджуваного рівняння, не повинен дорівнювати 0, а ранг матриці повинен дорівнювати числу ендогенних змінних моделі мінус 1, тобто 3-1=2.

Перше рівняння. Матриця коефіцієнтів при змінних, що не входять до рівняння, має вигляд: $A_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, що її ранг дорівнює 2, а $\det A_1 = \det\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \beta_2 \neq 0$. Достатня умова для першого рівняння виконується.

Друге рівняння. Матриця коефіцієнтів при змінних, що не входять до рівняння, має вигляд: $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$. Її ранг також дорівнює 2, а $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_2\gamma_1 \neq 0$. Достатня умова для першого рівняння виконується.

Третє рівняння. Матриця коефіцієнтів при змінних, що не входять до рівняння, має вигляд: $A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ -1 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$. Її ранг дорівнює 2, оскільки визначник квадратної підматриці 2x2 цієї матриці не дорівнює 0, а

$\det A_3^* = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_2 \neq 0$. Достатня умова для першого рівняння виконується.

Таким чином, перші два рівняння моделі строго ідентифіковані, для їх оцінки застосуємо непрямий метод найменших квадратів, останнє рівняння надідентифіковане, його оцінимо за допомогою двоетапного методу найменших квадратів.

Перетворимо систему до зведеного вигляду. Підставляючи третє рівняння в друге, отриманий результат – в перше рівняння неважко отримати систему:

$$R_t = \pi_{10} + \pi_{11}G_t + \pi_{12}M_t + v_{1t},$$
$$Y_t = \pi_{20} + \pi_{21}G_t + \pi_{22}M_t + v_{2t}, \qquad (*)$$
$$I_t = \pi_{30} + \pi_{31}G_t + \pi_{32}M_t + v_{3t},$$

де

$$\pi_{10} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_1\gamma_0}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{11} = \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{12} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$
$$\pi_{20} = \frac{\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_0\gamma_1 + \gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{21} = \frac{\alpha_1\beta_2\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{22} = \frac{\alpha_2\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$
$$\pi_{30} = \frac{\beta_0 + \beta_1\gamma_0 + \alpha_0\beta_1\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{31} = \frac{\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{12} = \frac{\alpha_2\beta_1\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1}.$$

Застосування непрямого методу найменших квадратів вимагає знаходження коефіцієнтів системи у структурному вигляді через коефіцієнти $\pi_{ij}, i = \overline{1,3},\ j = \overline{0,2}$. Неважко знайти

$$\gamma_1 = \frac{\pi_{32}}{\pi_{12}},\ \beta_1 = \frac{\pi_{22}}{\pi_{32}},\ \alpha_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}},$$
$$\beta_2 = \pi_{21}\left(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1\right) = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}},$$
$$\alpha_2 = \pi_{12}\left(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1\right) = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}}.$$

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_1\gamma_0 = \pi_{10}\left(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1\right), \\ \alpha_0\beta_1\gamma_1 + \beta_0 + \beta_1\gamma_0 = \pi_{20}\left(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1\right), \\ \alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_0\gamma_1 + \gamma_0 = \pi_{30}\left(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1\right), \end{cases}$$

отримуємо

$$\alpha_0 = \frac{\pi_{10}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{20}}{\pi_{21}},\ \beta_0 = \frac{\pi_{20}\pi_{32} - \pi_{22}\pi_{30}}{\pi_{32}},\ \gamma_0 = \frac{\pi_{30}\pi_{12} - \pi_{32}\pi_{10}}{\pi_{12}}.$$

Застосовуючи звичайний МНК оцінимо рівняння системи (*):

$\hat{R}_t = 3,594 - 0,044G_t - 0,279M_t, R^2 = 0,75;$

$\hat{Y}_t = 1,302 - 0,917G_t - 0,074M_t, R^2 = 0,97;$

$\hat{I}_t = -8,488 + 2,194G_t - 0,329M_t, R^2 = 0,80.$

Використовуючи наведені вище формули знаходимо оцінки коефіцієнтів у структурному вигляді системи:

$$\alpha_0 = \frac{\pi_{10}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{20}}{\pi_{21}} = \frac{3,594 \cdot (-0,917) - (-0,044) \cdot 1,302}{-0,917} = 3,53;$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}} = \frac{-0,044}{-0,917} = 0,05;$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}} = \frac{(-0,279) \cdot (-0,917) - (-0,044) \cdot (-0,074)}{-0,917} = -0,215;$$

$$\beta_0 = \frac{\pi_{20}\pi_{32} - \pi_{22}\pi_{30}}{\pi_{32}} = \frac{1,302 \cdot (-0,329) - (-0,074) \cdot (-8,488)}{(-0,329)} = 3,21;$$

$$\beta_1 = \frac{\pi_{22}}{\pi_{32}} = \frac{-0,074}{-0,329} = 0,22;$$

$$\beta_2 = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}} = \frac{(-0,279) \cdot (-0,917) - (-0,044) \cdot (-0,074)}{-0,279} = -0,91.$$

Для оцінки третього рівняння системи у структурній формі застосуємо двоетапний метод найменших квадратів. Замість змінної R_t підставимо її оцінку, знайдену нами: $\hat{R}_t = 3,594 - 0,044G_t - 0,279M_t$ та оцінимо регресію $I_t = \delta_0 + \delta_1\hat{R}_t + \varepsilon_t$:

$\hat{I}_t = 9,33 - 2,61\hat{R}_t, R^2 = 0,59.$

Таким чином, остаточно оцінена система записується у вигляді:

$\hat{R}_t = 3,594 - 0,044G_t - 0,279M_t,$

$\hat{Y}_t = 1,302 - 0,917G_t - 0,074M_t,$

$\hat{I}_t = 9,33 - 2,61\hat{R}_t.$

Задачі

Група А

Задача 5.1. Нехай є структурний вигляд системи одночасних рівнянь:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \beta_{10} + \beta_{12}Y_{2t} + \beta_{13}X_{1t} + u_{1t} \\ Y_{2t} &= \beta_{20} + \beta_{22}Y_{1t} + \beta_{23}X_{2t} + u_{2t} \end{aligned},$$

з якої було отримано таку оцінену приведену форму:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{1t} &= 4 + 3X_{1t} + 8X_{2t} \\ \hat{Y}_{2t} &= 2 + 6X_{1t} + 10X_{2t} \end{aligned}.$$

Виходячи зі значень приведеної форми, розрахуйте параметри структурної форми.

Задача 5.2. Чому не обов'язково застосовувати двоетапний метод найменших квадратів до точно ототожнених (ідентифікованих) рівнянь? Пояснити на умовному прикладі.

Задача 5.3. Знайдіть зведений вигляд моделі: $\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_{1t}, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \\ I_t = \gamma + \delta Y_t + \varepsilon_{2t}. \end{cases}$

Визначте, чи є модель ідентифікованою. Яким чином потрібно провести оцінку коефіцієнтів моделі?

Задача 5.4. Розгляньте таку модифіковану кейнсіанську модель визначення доходу:

$$\begin{aligned} C_t &= \beta_{10} + \beta_{11}Y_t + u_{1t}, \\ I_t &= \beta_{20} + \beta_{21}Y_t + \beta_{22}Y_{t-1} + u_{t2}, \\ Y_t &= C_t + I_t + G_t, \end{aligned}$$

де C – споживання, I – витрати на інвестиції, Y – доход, G – витрати уряду. Нехай Y та G є екзогенними змінними.

1. Запишіть рівняння у приведеній формі та визначте, які з них є точно ідентифіковані, а які надідентифіковані.
2. Який з методів необхідно використати для оцінки точно ідентифікованого та надідентифікованого рівняння?

Задача 5.5. Для моделі попиту і пропозиції грошей

$$M_t^D = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + u_{1t},$$

$$M_t^S = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{2t}.$$

1. Визначити зведений вигляд моделі..
2. Визначити метод оцінки системи.

Задача 5.6. Для деякої моделі були обчислені коефіцієнти структурної

$$y_1 = -2 + \alpha_1 y_2 + 3x_2 + \varepsilon_{1t},$$

$$y_2 = 10,1 - 4y_1 + 12x_1 + \varepsilon_{2t},$$

$$y_3 = 4,4 - 0,95y_1 + 1,6y_2 + \varepsilon_{3t},$$

та зведеної форми:

$$y_1 = 7,1 + 3,8x_1 - 4x_2 + v_1,$$

$$y_2 = 4,8 - 2,3x_1 - 1,7x_2 + v_2,$$

$$y_3 = 5,4 + \pi_{31}x_1 + \pi_{32}x_2 + v_3.$$

1. Якими методами отримані оцінки структурної та зведеної форм моделі?
2. Знайдіть невідомі коефіцієнти $\alpha_1, \pi_{31}, \pi_{32}$.

Задача 5.7. Задана система рівнянь попиту та пропозиції у зведеній формі. Зробити перехід від оцінок параметрів зведеної форми до оцінок одночасних структурних рівнянь. Обчислити еластичність попиту та пропозиції в залежності від ціни та доходу для арифметичних середніх цих змінних.

Регресія y_1 відносно x_1 та x_2	Регресія y_2 відносно x_1 та x_2	Середні значення змінних			
		y_1	y_2	x_1	x_2
y_1=144+0,005x_1 – 0,32x_2	y_2=522,2+0,012x_1 +0,189x_2	482	174	223	39

Задача 5.8. Провести ідентифікацію наступної моделі:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_0 y_3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3, \\ y_2 = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_3 + \beta_2 x_2, \\ y_3 = \gamma_0 y_2 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_3. \end{cases}$$

Виходячи зі зведеної форми системи

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3, \\ y_2 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3, \\ y_3 = -5x_1 + 8x_2 + 5x_3, \end{cases}$$

знайти структурні коефіцієнти моделі.

Задача 5.9. При оцінюванні системи рівнянь попиту та пропозиції

$$\begin{cases} q = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_1 \\ q = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 z + \varepsilon_2 \end{cases},$$

де p – ціна, q – обсяг продаж, y – доход, z – вартість ресурсів, на першому етапі двохетапного МНК оцінюється регресія p відносно y і z. Довести, що в регресіях q відносно

- $\hat{p}$ і y
- $\hat{p}$ і z

співпадають залишки.

Група Б

Задача 5.10. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 M_t + \alpha_2 Y_t + \varepsilon_{1t},$$
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_t + \varepsilon_{2t}.$$

Задача 5.11. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

Задача 5.12. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + \varepsilon_{3t},$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

Задача 5.13. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \varepsilon_{2t},$$
$$Y_t = C_t + I_t.$$

Задача 5.14. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\
I_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_t + \varepsilon_{2t}, \\
R_t &= \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + \gamma_3 R_{t-1} + \varepsilon_{3t}, \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t.
\end{aligned}
$$

Задача 5.15. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 M_t + \varepsilon_{1t}, \\
Y_t &= \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_t + \beta_3 G_t + \varepsilon_{2t}, \\
I_t &= \gamma_0 + \gamma_1 R_t + \varepsilon_{3t}.
\end{aligned}
$$

Задача 5.16. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 G_t + \varepsilon_{1t}, \\
I_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 I_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\
Y_t &= C_t + I_t.
\end{aligned}
$$

Задача 5.17. Користуючись даними таблиці 5.1 оцінити систему одночасних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 I_t + \varepsilon_{1t}, \\
I_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\
G_t &= \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \varepsilon_{3t}, \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t.
\end{aligned}
$$

Розв'язок економетричних задач за допомогою комп'ютера

Розв'язок задач в середовищі „Mathematica”

Основні команди середовища “Mathematica”

Цей розділ книги присвячений допомогти користувачу у повсякденній роботі з “Mathematica” для вирішення багатьох задач, особливо з економетрики. Задача цього підрозділу – ілюстрація можливостей пакету “Mathematica” для вирішення конкретних задач, які можуть стояти перед економетристами. Крім цього буде показано, як можна розробляти та використовувати самостійно написані програми.

Mathematica є цілком інтегроване середовище для технічної роботи. Вперше воно було випущене в 1988 і зробило величезний крок вперед у використанні комп’ютерної техніки в багатьох галузях. Середовище “Mathematica” було розроблено Стефаном Вольфрамом (Stephen Wolfram) у створеній ним компанії Wolfram Research під Windows-орієнтовані операційні системи. Програма представляє собою стандартний MDI інтерфейс, тобто дозволяє одночасно працювати з декількома документами. Розглянемо основні команди меню, з якими будемо працювати доволі часто.

Серед основних пунктів меню слід виділити:

Меню		Дозволяє:
Файл	File	створювати нові, записувати на диск, зчитувати з диску, роздруковувати файли з програмами та розрахунками.
Редагувати	Edit	здійснювати стандартні операції по копіюванню, знищенню, вставці даних, відміни останньої операції.
Чарунка	Cell	налаштувати параметри чарунок
Формат	Format	форматувати текст, документ, чарунки, змінювати шрифти, кольори тощо.
Ввід	Input	створювати форми для роботи з даними
Ядро	Kernel	змінювати опції запуску програми обчислень, проводити розрахунки в заданій послідовності.
Знайти	Find	здійснювати пошук в документі.
Вікно	Window	переключатися між вікнами документів.
Допомога	Help	отримати підказку по всіх командах середовища “Mathematica”.

Кожна команда записується у окрему чарунку, яка праворуч відокремлена синім кольором. Для виконання команди необхідно поставити курсор у відповідну чарунку і натиснути клавішу Enter, яка розташована в правому нижньому куті клавіатури (такий саме ефект має комбінація клавіш **Shift + Enter**). Якщо необхідно записати у чарунку декілька команд (програми), то ввід кожної з них повинен закінчуватися натисканням клавіші Enter. Для активізації програми слід використовувати алгоритм активізації звичайної чарунки. Якщо потрібно виконати всі команди у всіх чарунках, то потрібно вибрати команду Ядро –> Обчислення –> Обчислення записної книги (Kernel –> Evaluation –> Evaluate Notebook).

При активізації команди чи програми "Mathematica" приймає в чергу відповідну чарунку і дає їй відповідний номер у форматі "In(X):", де X - номер команди, яка виконується з початку роботи інтерпретатора команд Kernel. При завершенні обчислень видається результат у новій чарунці, яка має той саме номер X: "Out(X):". Кожній чарунці "In(X):" відповідає єдина чарунка "Out(X):", тому завжди легко знайти у документі відповіді на поставлені в програмі завдання. Для обнуління всіх змінних та даних достатньо вийти з Kernel і перезавантажити його.

Для проведення арифметичних обчислень слід набрати необхідний вираз у чарунці, використовуючи знаки "+", "-", "*", "/","^" та дужки. Наприклад,

```
2+2
(12^2+30/6-1)*(9^(1/2)-1)
```

Для більш зручного представлення виразів їх можна набирати за допомогою спеціальних наборів символів, які можна визвати командою меню Файл->Палітри (File->Paletts) та вибором однієї з семи запропонованих таблиць. В залежності від необхідних символів користувач вибирає одну з них. Для набору команд нашого курсу найбільш зручною буде вікно „Basic Input”. За допомогою її останній вираз можна представити як

$$\left(12^2+\frac{30}{6}-1\right)*\left(\sqrt{9}-1\right)$$

Значною перевагою "Mathematica" є можливість обробляти дуже великі числа. Наприклад,

```
100!
6^200
```

Крім цього, значення виразів можна присвоювати змінним. Зауважимо, що назва змінної повинна починатися з літери, наприклад,

```
a=6
```

Вирази, звичайно, можуть містити і змінні:

```
(a+3)(a-3)
```

Якщо необхідно підрахувати значення виразу при якомусь значенні змінної можна зробити так:

```
b^2 /. b->2
```

Замість b "Mathematica" підставить значення 2 і видасть відповідь 4.

Всі функції "Mathematica" починаються лише з великої літери, а її параметри, на відміну від багатьох мов програмування, записуються у квадратних дужках. Наприклад,

```
Random[]
```

яка видає випадкове число з проміжку від 0 до 1. Для того, щоб випадкове число було згенеровано з деякого проміжку і яке б мало визначений формат, цю функцію треба викликати з параметрами:

```
Random[Integer, {1, 100}]
Random[Real, {0, 10}]
```

Важливою функцією є N, яка дозволяє перевести будь-який вираз у десятковий дріб з необхідною кількістю цифр після коми:

```
N[Pi, 200]
N[12/23, 7]
```

Узагальненням змінних є вектори, масиви та матриці. Для задання вектору необхідно вказати всі його елементи у фігурних дужках:

```
v1={1, 2, 3, 4}
```

Вектор може містити елементи-вектори:

```
v2={1, 2, {4, 5, 6}, 7, {2, 3, {1, 2}}, 8}
```

Під матрицею розуміється вектор, що містить однакові за довжиною елементи-вектори:

```
K={{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}
```

Такий вираз представляє собою матрицю з двома рядками та трьома стовпчиками. Для того, щоб звернутися до деякого елементу матриці або вектору, необхідно вказати його координати у подвійних квадратних дужках:

```
v2[[1]]
K[[1, 2]]
```

Якщо для матриці вказати лише одну координату, то результатом буде цілий рядок

```
K[[1]]
```

Для наглядного представлення матриць та векторів використовується функція MatrixForm:

```
MatrixForm[K]
```

Слід зазначити, що "Mathematica" по-різному інтерпретує добуток векторів. Якщо використовувати знак "*", то в результаті отримуємо поелементний добуток, а якщо знак "." - то скалярний добуток. Порівняйте

```
q1={1, 2, 3}
q2={3, 4, 5}
q1*q2
q1.q2
```

Для множення матриць найчастіше використовується знак ".":

```
A={{1, 2}, {3, 4}}
B={{2, 3}, {5, 6}}
A.B
```

Функція Length повертає кількість елементів вектора:

```
Length[v1]
Length[K]
```

Функція Table дозволяє створити вектор або матрицю:

```
f1=Table[i, {i, 1, 20}]
m1=Table[(i+j)^2, {i, 1, 4}, {j, 1, 5}]
```

В першому прикладі створюється вектор, що містить числа від 1 до 20, в другому - будується матриця розміру 4x5, кожна чарунка якої містить квадрат суми відповідного рядка та стовпчика.

Для визначення детермінанту матриці використовується функція Det:

```
Det[A]
```

За допомогою функцій Transpose та Inverse знаходяться відповідно транспонована та обернена матриця:

```
Transpose[A]
Inverse[A]
```

Для виділення першого або останнього елементів використовуються функції First та Last:

```
First[f1]
Last[f1]
```

Корисними слід вважати функції Take та Drop. Перша виділяє з початку вектору кількість елементів, вказаних у другому параметрі. Якщо він від'ємний, то елементи виділяються з кінця вектора. На відміну від цієї функції Drop відкидає з вектору вказану кількість елементів. Якщо ця кількість від'ємна, то відкидаються останні елементи:

```
Take[f1, 4]
Take[f1, -4]
Drop[f1, 4]
Drop[f1, -4]
```

Для з'єднання декількох векторів використовується функція Join:

```
f2=Join[f1, f1]
```

Сортування вектору здійснюється функцією Sort:

```
f3=Sort[f2]
```

Змінити порядок елементів на обернений дозволяє Reverse:

```
Reverse[f3]
```

Функції RotateLeft та RotateRigth зміщують всі елементи на відповідну кількість позицій ліворуч або праворуч:

```
RotateLeft[f3, 5]
RotateRight[f3, 3]
```

Велике значення у вивченні властивостей економічних змінних має графічний аналіз. „Mathematica” пропонує легкий і потужний механізм побудови діаграм. Найпростіший графік можна побудувати за допомогою функції Plot. Для цього слід вказати всі функції, які необхідно побудувати, а також інтервал, на якому слід здійснити побудову:

```
Plot[{Sin[x]*Cos[2x], Log[x]}, {x, 1, 2*Pi}]
```

Функція ListPlot дозволяє будувати графік по значеннях декількох векторів, якщо інший не заданий, то автоматично додається вектор з координатами 1, 2, 3, … тощо:

```
q=Table[Random[Integer, {1, 20}], {i, 1, 40}]
ListPlot[q, PlotJoined ->True]
```

Нарешті, побудова графіка функції, заданої неявно здійснюється за допомогою функції ParametricPlot:

```
ParametricPlot[{Cos[5t], Sin[3t]}, {t, 0, 2*Pi},
                                   AspectRatio->Automatic]
```

Аналогічно побудова графіків здійснюється у тривимірному просторі:

Plot3D[Sin[xy], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]

Важливу роль у середовищі „Mathematica” грають модулі. Справді, недоречно тримати у пам'яті комп'ютера всі відомі функції, більшість з яких непотрібна користувачеві, тому було вирішено дозволити завантажувати функції тоді, коли вони потрібні. Користувач повинен вказати назву модуля, в якій зберігаються відповідні програми та змінні. Для цього використовується оператор Get або скорочено "<<":

<<Statistics`LinearRegression`

Зразу після "<<" вказується назва папки, де знаходиться модуль, потім у лапках - назва модуля. Зверніть увагу на лапки: вони є нестандартними!

Для визначення назв всіх функцій завантаженого модуля слід визвати функцію Names:

Names[“Statistics`LinearRegression`*”]

Для виводу функцій, які мають відповідний правопис також використовують функцію Names з маскою. Наступний приклад виводить всі функції, назва яких починається з R:

Names[“R*”]

Часто доводиться працювати з різноманітними розподілами. Для цього призначено пакет

<<Statistics`ContinuousDistributions`

За його допомогою можна викликати такі розподіли:

F-розподіл:	**FratioDistribution[regr1, regr2]**
t- розподіл:	**StudentTDistribution[regr]**
χ^2 – розподіл:	**ChiSquareDistribution[regr]**
Нормальний розподіл:	**NormalDistribution[**μ,σ**]**

Для знаходження квантиля розподілу використовується функція Quantile:

Quantile[StudentTDistribution[regr, 1-α/2]

Зауважте, що „Mathematica” видає лише односторонній розподіл Стьюдента, а тому для переведення до стандартної статистики необхідно використовувати рівень надійності не $1-\alpha$, а $1-\frac{\alpha}{2}$.

Найуживанішою функцію для економетричних розрахунків буде функція **Regress.** Вона має три обов'язкові параметри та два необов'язкові.

На першому місці вказується матриця змінних, по яких будується регресія. Слід зауважити, що залежна змінна **завжди** вказується на останньому місці.

Другим параметром слугує список всіх змінних у відповідних формах, що входять до регресії.

Третій параметр вказує на список дійсних змінних, що використовуються. Список співпадає з переліком незалежних змінних в матриці змінних.

Для другого та третього параметра повинні бути вибрані такі назви змінних, які ще не використовувалися раніше.

Розглянемо декілька прикладів запису функції **Regress**.

Вид регресії	Другий параметр	Третій параметр
$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$	`{1,t}`	`{t}`
$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$	`{1, t1, t2}`	`{t1, t2}`
$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \varepsilon$	`{1, t1, t2, t1^2}`	`{t1, t2}`
$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_1^2 \ln x_2 + \varepsilon$	`{1, t1, t1^2, t1^2*Log[t2]}`	`{t1, t2}`

Якщо потрібно побудувати регресію без константи, необхідно це явно вказати комп'ютеру:

```
Regress[Z, {t}, {t}, IncludeConstant->False]
```

Функція **Regress** може містити ще один параметр **RegressionReport** – набір відповідних опцій, які вказують на те, які числові характеристики моделі потрібно показати на екрані.

Опція	**Опис**
BestFit	Функція регресії
BestFitParameters	Параметри регресії
ANOVATable	Коваріаційно - дисперсійна таблиця
EstimatedVariance	Оцінка дисперсії залишків
ParameterTable	Оцінка моделі
ParameterCITable	Довірчі інтервали для коефіцієнтів регресії
ParameterConfidenceRegion	Довірча область для коефіцієнтів моделі
FitResiduals	Залишки моделі
PredictedResponse	Оцінки залежної змінної на основі регресії
SinglePredictionCITable	Надійні інтервали для прогнозних значень
RSquared	Коефіцієнт детермінації
AdjustedRSquared	Скоригований коефіцієнт детермінації
CoefficientOfVariance	Коефіцієнт варіції
CovarianceMatrix	Коваріаційна матриця
CorrelationMatrix	Кореляційна матриця

Якщо параметр не вказано, то автоматично підраховуються **ParameterTable, ANOVATable, RSquared, AdjustedRSquared**. Для того, щоб змінити порядок виводу характеристик чи їхнього набору, необхідно вказати список необхідних опцій:

```
Regress[Z, {1, t}, {t}, RegressionReport -> {RSquared,
  ParameterTable, CorrelationMatrix,
  AdjustedRSquared,  SinglePredictionCITable,
  MeanPredictionCITable, FitResiduals}]
```

Приклади розв'язання задач в середовищі „Mathematica”

Приклад 1.

1. На основі наведених місячних даних (y – доход фірми, млн. грн., x1 – кількість працівників, x2 – кількість оброблених документів, тис. сторінок, x3 – відношення зарплати президента фірми до середньої зарплати по фірмі)

y	x1	x2	x3
62,4	37	0,879	60,60
105,9	51	2,742	63,75
152,8	55	3,393	45,38
144,8	64	3,625	91,00
159,2	75	3,635	73,23
159,0	81	3,724	33,81
159,0	85	3,871	33,87
184,2	85	4,379	19,93
181,8	87	4,407	99,69
166,5	88	4,613	63,98
188,4	90	4,638	83,50
190,2	91	4,639	75,54
192,8	91	4,743	90,82
196,5	93	4,795	47,98
196,7	94	4,889	82,62

y	x1	x2	x3
202,5	98	4,911	19,58
193,6	101	5,256	71,16
236,0	101	5,476	96,90
237,1	111	5,633	78,92
230,5	114	5,740	86,97
230,9	115	5,750	47,23
251,3	119	5,762	46,94
256,1	125	5,957	34,78
260,6	129	6,001	55,91
258,4	132	6,017	86,63
268,8	134	6,153	83,18
277,6	137	6,609	89,40
311,1	164	7,178	64,91
337,7	167	7,962	23,40
359,9	171	8,624	59,38

   побудувати регресію виду $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$. Обчислити коефіцієнт детермінації та скоригований коефіцієнт детермінації моделі. Перевірити модель на адекватність, $\alpha = 0,05$.
2. Перевірити гіпотезу $\beta_1 = 0,9$, $\alpha = 0,05$.
3. Перевірити модель на стійкість, розбивши всі спостереження дві групи розмірами $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $\alpha = 0,05$.
4. Перевірити наявність гетероскедастичності за критерієм Голдфелда-Квондта, $n_1 = 9$, $n_2 = 9$, $\alpha = 0,05$.
5. Перевірити наявність гетероскедастичності за критерієм Уайта, $\alpha = 0,05$.
6. Перевірити наявність автокорельованості збурень, $\alpha = 0,05$.

Розв'язок.

Для розв'язання всіх пунктів необхідно спочатку завантажити 2 модулі:

```
<< Statistics`LinearRegression`
<< Statistics`ContinuousDistributions`
```

Завантажуємо дані (зверніть увагу, що для введення дробових виразів слід використовувати знак крапка „.”, а не кома):

```
x1 = {37,  51, 55, 64, 75, 81, 85, 85, 87, 88, 90, 91,
 91, 93, 94, 98, 101, 101, 111, 114, 115, 119, 125,
 129, 132, 134, 137, 164, 167, 171};
x2 = {0.8792, 2.742, 3.393, 3.625, 3.635, 3.724,
 3.871, 4.379, 4.407, 4.613, 4.638, 4.639, 4.743,
 4.795, 4.889, 4.911, 5.256, 5.476, 5.633, 5.74, 5.75,
 5.762, 5.957,  6.001, 6.017,  6.153, 6.609, 7.178,
 7.962, 8.624};
x3 = {60.6, 63.75, 45.38, 91., 73.23, 33.81, 33.87,
 19.93, 99.69, 63.98, 83.5, 75.54, 90.82, 47.98,
 82.62, 19.58, 71.16, 96.9, 78.92, 86.97, 47.23,
 46.94, 34.78, 55.91, 86.63, 83.18, 89.4, 64.91, 23.4,
 59.38};
y = {62.36, 105.9, 152.8, 144.8, 159.2, 159., 159.,
 184.2,181.8, 166.5, 188.4, 190.2, 192.8, 196.5,
 196.7, 202.5, 193.6, 236., 237.1, 230.5, 230.9,
 251.3, 256.1, 260.6, 258.4, 268.8, 277.6, 311.1,
 337.7, 359.9};
```

На основі даних створюємо регресійну матрицю:

```
Z=Transpose[{x1, x2, x3, y}]
```

Здійснюємо побудову регресії (зверніть увагу, що результат функції Regress збережено у змінній r):

```
r=Regress[Z,{1, t1, t2, t3}, {t1, t2, t3}]
```

Вивід „Mathematica" має вигляд:

```
ParameterTable→
     Estimate      SE            Tstat       Pvalue
 1   4.43555       7.43955       0.596212    0.556189
t1   0.806571      0.2226885     3.55498     0.00147472
t2   24.7707       4.83389       5.12438     0.0000242097
t3   -0.0179227    0.0723254     -0.247808   0.806231
RSquared→ 0.981927, AdjustedRSquared→ 0.979841,
EsimatedVariance→ 84.157, ANOVATable→
            DF     SumOfSq   MeanSq     Fratio   PValue
   Model    3      118880.0  39626.6    470.865  0.
   Error    26     2188.08   84.157
   Total    29     121068.
```

1. З отриманої таблиці знаходимо оцінки коефіцієнтів регресії та відповідні t–статистики (стовпчики "Estimate" та "TStat" об'єкту „ParameterTable") і записуємо у вигляді вибіркової регресійної функції:

$$\hat{y} = \underset{(0,596)}{4,44} + \underset{(3,555)}{0,81}\,x1 + \underset{(5,124)}{24,77}\,x2 - \underset{(-0,248)}{0,02}\,x3$$

Стовпчик "PValue" містить імовірність прийняття гіпотези про неадекватність відповідного коефіцієнту. Якщо значення в стовпчику "PValue" перевищує заданий рівень похибки $\alpha = 0,05$, то коефіцієнт вважається статистично не значимим. Таким чином, значимими коефіцієнтами є β_1 та β_2, незначимими – β_0 та β_3.

Змінна „RSquared” містить коефіцієнт детермінації: $R^2 = 0,98$, що свідчить про високу ступінь адекватності регресії: на 98% дисперсія пояснена за рахунок моделі. Скоригований коефіцієнт детермінації дорівнює $R^2_{adj} = 0,9798$, оцінка дисперсії – $\hat{\sigma}^2 = 84,157$.

З таблиці „ANOVATable” знаходимо такі значення:

$3 = k - 1$, $ESS = 118880$,

$26 = n - k$, $RSS = 2188$,

$29 = n - 1$, $TSS = ESS + RSS = 121068$.

Практичне значення статистики Фішера для перевірки моделі на адекватність знаходиться в стовпчику „FRatio” $F_{pr} = 470,865$. Для перевірки гіпотези про адекватність моделі це значення можна порівняти з теоретичним значенням. Проте є і легший спосіб: порівняти значення в стовпичку “PValue” з рівнем похибки $\alpha = 0,05$. Оскільки число в “PValue” менше ніж 0,05, то модель виявляється адекватною.

Наведена регресія показує, що кожні додаткові 1000 сторінок документів на фірмі приносять в середньому 810 гривень доходу на місяць, кожен новий працівник – 24,77 тис. грн. В той же час відношення зарплати президента фірми до середньої зарплати по фірмі не є суттєвим для обчислення доходу.

2. Для перевірки гіпотези $H_0 : \beta_1 = 0,9$ запишемо таку програму:

```
m = 0.9; i = 1; α = 0.05;
tpr = Abs[(ParameterTable /. r)[[1, i + 1, 1]]-m] /
  (ParameterTable /. r) [[1, i + 1, 2]]
regr = (ANOVATable /. r)[[1, 2, 1]]
tteor = Quantile[StudentTDistribution[regr], 1 - α/2]
If[tpr > tteor, Print["Коефіцієнт не можна прийняти
 рівним ", m], Print["Коефіцієнт можна прийняти
 рівним ", m]]
```

Змінна m містить те значення, яке слід перевірити, i – показує який саме коефіцієнт слід перевіряти. Якщо вказати, наприклад, $i = 2$, це означатиме, що необхідно перевірити коефіцієнт β_2.

Вивід має вигляд:

```
0.411788
26
2.05553
Коефіцієнт можна прийняти рівним 0.9
```

Таким чином, оскільки $t_{pr} = 0,41$, $t_{teor} = t(26;\ 0,05) = 2,05$, то гіпотеза приймається.

3. Для перевірки моделі на стійкість за критерієм дисперсійного аналізу слід виконати таку програму:

```
n1 = 10; n = Length[Z]; n2 = n - n1; α = 0.05;
r1 = Regress[Take[Z, n1], {t1, t2, t3}, {t1, t2, t3}];
r2 = Regress[Take[Z,-n2], {t1, t2, t3}, {t1, t2, t3}];
RSS = (ANOVATable  /. r)[[1, 2, 2]];
RSS1 = (ANOVATable  /. r1)[[1, 2, 2]];
RSS2 = (ANOVATable  /. r2)[[1, 2, 2]];
k = (ANOVATable  /. r)[[1, 1, 1]] + 1;
Fpr = ((RSS-(RSS1+RSS2))/k)/((RSS1+RSS2)/(n-2*k))
Fteor = Quantile[FRatioDistribution[k, n-2*k], 1 - α]
If[Fpr > Fteor,  Print["Модель не є стійкою"],
 Print["Модель є стійкою"]]
```

В третьому рядку програми функція Take містить від'ємний другий параметр. Це зроблено для того, щоб включити до регресії останні n2 спостережень.

В критерії дисперсійного аналізу побудова регресії здійснюється тричі: по всіх спостереженнях та по кожній з груп. Тоді

RSS - сума квадратів залишків моделі, яка оцінена по всіх спостереженнях;

RSS1 - сума квадратів залишків моделі, яка оцінена по першій групі спостережень;

RSS2 - сума квадратів залишків моделі, яка оцінена по другій групі спостережень.

Вивід має вигляд

```
1.35294
2.81671
Модель є стійкою
```

Таким чином, $F_{pr} = 1,35$, $F_{teor} = F\left(4;22;0,95\right) = 2,82$, гіпотеза про стійкість моделі приймається.

4. Перевіримо наявність гетероскедастичності збурень за критерієм Голдфелда-Квондта.

```
n = 9; α = 0.05;
r1 = Regress[Take[Z, n], {1, t1, t2, t3}, {t1, t2, t3}];
r2 = Regress[Take[Z, -n], {1, t1, t2, t3}, {t1, t2, t3}];
F=(EstimatedVariance /. r1)/(EstimatedVariance /. r2);
Fpr = If[F < 1, 1/F, F]
regr = (ANOVATable /. r1) [[1, 2, 1]];
Fteor = Quantile[FRatioDistribution[regr, regr], 1 - α]
If[Fpr > Fteor, Print["Гетероскедастичність має
 місце"], Print["Гетероскедастичності немає"]]
```

Вивід має вигляд:

```
3.93732
4.28387
Гетероскедастичності немає
```

Оскільки $F_{pr} = 4,94$ більше $F_{teor} = 4,28$, то гетероскедастичність присутня.

5. Перевіримо наявність гетероскедастичності збурень за критерієм Уайта:

```
r = Regress[Z, {1, t1, t2, t3}, {t1, t2, t3},
 RegressionReport -> {FitResiduals}];
e = FitResiduals /. r;
r1 = Regress[Transpose[{x1, x2, x3, e^2}], {1, t1, t2,
 t3, t1^2, t2^2, t3^2, t1*t2, t1*t3, t2*t3}, {t1, t2,
 t3}];
```

Вивід має вигляд:

ParameterTable→

	Estimate	SE	Tstat	Pvalue
1	-547.204	589.434	-0.928354	0.364293
t1	-3.21626	14.2024	-0.226459	0.823143
t2	222.513	304.319	0.731185	0.473147
t3	8.12498	8.14547	0.997484	0.330446
$t1^2$	1.01158	0.416103	2.43108	0.0245827
$t2^2$	445.641	189.183	2.3556	0.0288116
$t3^2$	-0.0816421	0.0474772	-1.71961	0.100943
T1t2	-43.1846	18.0446	-2.39321	0.0266264
T1t3	0.00721237	0.211323	0.0341296	0.973112
T2t3	-0.076614	4.94389	-0.0154967	0.987789

RSquared→ 0.46153, AdjustedRSquared→ 0.219218,
EsimatedVariance→ 15129.2, ANOVATable→

	DF	SumOfSq	MeanSq	Fratio	PValue
Model	9	259348.	28816.5	1.90469	0.110383
Error	20	302584.	15129.2		
Total	29	561932.			

Побудована регресія є неадекватною („PValue” з „ANOVATable більше, ніж α) , тому гетероскедастичності за критерієм Уайта не виявлено.

6. Перевіримо наявність автокореляції збурень:

```
Regress[Z, {1, t1, t2, t3}, {t1, t2, t3},
 RegressionReport -> {DurbinWatsonD}]
```

Обрахована статистика Дарбіна-Уотсона дорівнює $d = 2,27$. З таблиці Дарбіна-Уотсона знаходимо нижню та верхню границі для $n = 30$ спостережень, $k' = 3 - 1 = 2$: $d_L = 1,28$, $d_U = 1,57$. Оскільки $d_U < d < 4 - d_U$, то робимо висновок, що автокореляція відсутня.

Приклад 2.

1. За наведеними даними про грошовий оборот одного з підприємств України визначити наявність сезонних коливань.

Квартал	Оборот, млн.грн.
1997/Q1	248
1997/Q2	285
1997/Q3	244
1997/Q4	276
1998/Q1	226
1998/Q2	387
1998/Q3	309
1998/Q4	390
1999/Q1	302
1999/Q2	528

Квартал	Оборот, млн.грн.
1999/Q3	352
1999/Q4	604
2000/Q1	435
2000/Q2	633
2000/Q3	550
2000/Q4	541
2001/Q1	650
2001/Q2	776
2001/Q3	643
2001/Q4	712

Квартал	Оборот, млн.грн.
2002/Q1	648
2002/Q2	756
2002/Q3	637
2002/Q4	807
2003/Q1	791
2003/Q2	853
2003/Q3	674
2003/Q4	863

Розв'язок.

Спочатку завантажуємо модуль та дані:

```
<< Statistics`LinearRegression`
y = {248, 285, 244, 276, 226, 387, 309, 390, 302,
 528, 352, 604, 435, 633, 550, 541, 650, 776, 643,
 712, 648, 756, 637, 807, 791, 853, 674, 863}
```

Створюємо фіктивні змінні:

```
L = Length[y];
q1 = Table[If[Mod[i, 4] == 1, 1, 0] , {i, 1, L}];
q2 = Table[If[Mod[i, 4] == 2, 1, 0] , {i, 1, L}];
q3 = Table[If[Mod[i, 4] == 3, 1, 0] , {i, 1, L}];
```

Функція Mod повертає залишок від ділення числа і на 4. Створимо змінну, яку моделюватиме трендовий компонент:

```
Trend = Table[i, {i, 1, L}];
```

Всі змінні записуємо до регресійної матриці. Для того, щоб чітко уявляти собі вигляд цієї матриці подивомось на її вигляд.

```
Z = Transpose[{q1, q2, q3, Trend, y}]
```

q_1	q_2	q_3	*Trend*	y
1	0	0	1	248
0	1	0	2	285
0	0	1	3	244
0	0	0	4	276
1	0	0	5	226
0	1	0	6	387
0	0	1	7	309
0	0	0	8	390
1	0	0	9	302
0	1	0	10	528
0	0	1	11	352
0	0	0	12	604
1	0	0	13	435
0	1	0	14	633

q_1	q_2	q_3	*Trend*	y
0	0	1	15	550
0	0	0	16	541
1	0	0	17	650
0	1	0	18	776
0	0	1	19	643
0	0	0	20	712
1	0	0	21	648
0	1	0	22	756
0	0	1	23	637
0	0	0	24	807
1	0	0	25	791
0	1	0	26	853
0	0	1	27	674
0	0	0	28	863

Оцінюємо регресію:

```
r = Regress[Z, {t1, t2, t3, t4}, {t1, t2, t3, t4}]
ParameterTable→
      Estimate    SE          Tstat       Pvalue
1     225.75      29.9425     7.53945     1.16809x10^-7
t1    -57.5871    30.2045     -1.90657    0.0691455
t2    50.2277     30.0592     1.67096     0.108283
t3    -88.6719    29.9717     -2.95852    0.00704255
t4    23.3281     1.32328     17.629      7.54952x10^-15
RSquared→ 0.937336, AdjustedRSquared→ 0.926438,
EsimatedVariance→ 3137.93, ANOVATable→
         DF   SumOfSq        MeanSq     Fratio     PValue
Model    4    1.07956x10^6   269890.    86.0088    1.72529x10^-12
Error    23   72172.5        3137.93
Total    27   1.15173x10^6
```

Обрахована модель є адекватною, всі коефіцієнти є значущими. Вибіркова регрессійна функція має вигляд:

$\hat{y}_t = 225,8 - 57,6 \cdot q_1 + 50,2 \cdot q_2 - 88,7 \cdot q_3 + 23,3 \cdot Trend$.

Таким чином, грошовий оборот фірми зростає в середньому на 23,3 тис. грн. за квартал. В першому кварталі оборот менший, ніж в четвертому на 57,6 тис. грн., в третьому – на 88,7 тис. грн. А оборот другого кварталу навпаки перевищує оборот четвертого на 50,2 тис. грн.

Приклади варіантів контрольної роботи в середовищі „Mathematica”

Варіант № 1

1. Для поданих рядів побудувати регресію виду

$$y=b0 + b1x1 + b2x2 + b3x1x2+e$$

2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 1-α=0.95
3. Перевірити гіпотезу H0: b2=11 з рівнем надійності 1-α=0.95
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.95, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 20 спостережень
5. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.95, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 53 спостереження
6. Перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності за критерієм Голдфелда-Квондта з рівнем надійності 1-α=0.95, розбивши спостереження на дві рівні групи по n1=n2=27 спостережень
7. Перевірити гіпотезу про наявність автокореляції залишків з рівнем надійності, 1-α=0.95
8. Зі змінної у виділити сезонні коливання з та без трендового компонента

X1={66, 60, 23, 81, 58, 20, 67, 63, 61, 59, 17, 52, 27, 71, 37, 55, 18, 41, 46, 66, 56, 23, 35, 35, 73, 46, 29, 36, 32, 43, 45, 56, 54, 67, 44, 22, 44, 79, 24, 49, 42, 54, 61, 67, 70, 49, 43, 49, 80, 20, 31, 30, 65, 60, 70, 56, 28, 76, 42};
X2={149, 58, 26, 72, 74, 102, 59, 99, 143, 49, 128, 105, 138, 153, 102, 142, 52, 47, 23, 120, 66, 129, 86, 151, 72, 92, 82, 101, 153, 145, 44, 24, 31, 118, 71, 73, 48, 120, 123, 86, 151, 94, 122, 121, 107, 120, 57, 124, 57, 49, 130, 45, 58, 58, 107, 42, 48, 95, 58};
Y={168, 108, 65, 15, 62, 156, 114, 84, 113, 104, 158, 33, 73, 140, 124, 173, 19, 15, 94, 134, 105, 156, 139, 134, 141, 58, 84, 129, 88, 105, 174, 55, 179, 11, 26, 31, 116, 74, 105, 62, 107, 69, 22, 131, 12, 117, 87, 200, 74, 69, 13, 81, 189, 167, 42, 37, 20, 166, 26};

Варіант № 2

1. Для поданих рядів побудувати регресію виду

$$y=b0 + b1\ x1 + b2\ x2 + b3\ x3 + b4\ x4 + b5\ x1\ x4$$

2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 1-α=0.95
3. Перевірити гіпотезу H0: b3=18 з рівнем надійності 1-α=0.95
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.95, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 15 спостережень
5. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.95, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 40 спостережень
6. Перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності за критерієм Голдфелда-Квондта з рівнем надійності 1-α=0.95, розбивши спостереження на дві рівні групи по n1=n2=20 спостережень
7. Перевірити гіпотезу про наявність автокореляції залишків з рівнем надійності, 1-α=0.95
8. Зі змінної у виділити сезонні коливання з та без трендового компонента

X1={38, 69, 23, 91, 67, 38, 75, 55, 76, 49, 66, 63, 50, 60, 55, 62, 38, 37, 19, 58, 39, 84, 53, 73, 44, 55, 46, 50, 85, 79, 21, 54, 76, 67, 47, 56, 65, 27, 49, 79, 56, 60, 53, 36, 50};
X2={217, 228, 219, 224, 233, 234, 237, 247, 228, 211, 210, 246, 233, 209, 193, 242, 201, 249, 210, 231, 216, 236, 228, 244, 229, 209, 255, 215, 218, 217, 253, 234, 222, 226, 235, 226, 243, 255, 247, 203, 218, 237, 222, 278, 216};
X3={24, 44, 39, 33, 39, 42, 36, 37, 25, 43, 27, 23, 36, 31, 35, 20, 23, 22, 35, 22, 30, 36, 34, 33, 26, 44, 47, 20, 39, 23, 31, 36, 34, 32, 24, 33, 51, 21, 42, 32, 48, 51, 27, 30, 38};
X4={134, 158, 144, 124, 124, 105, 90, 150, 121, 108, 174, 143, 119, 166, 152, 142, 95, 148, 186, 197, 113, 127, 97, 138, 156, 145, 174, 114, 107, 151, 87, 154, 163, 120, 114, 134, 127, 162, 117, 117, 164, 133, 125, 141, 136};
Y={61, 120, 33, 105, 96, 40, 101, 118, 26, 105, 90, 74, 102, 119, 99, 134, 51, 74, 122, 35, 77, 34, 58, 116, 31, 62, 41, 27, 83, 38, 87, 57, 74, 81, 144, 131, 119, 110, 61, 145, 85, 51, 87, 126, 24};

Варіант № 3

1. Для поданих рядів побудувати регресію виду

   y=b0 + b1 x1 + b2 x2 + b3 x3 + b4 Log[x3 x4]

2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 1-α=0.9
3. Перевірити гіпотезу H0: b4=11 з рівнем надійності 1-α=0.9
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.9, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 13 спостережень
5. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.9, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 34 спостереження
6. Перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності за критерієм Голдфелда-Квондта з рівнем надійності 1-α=0.9, розбивши спостереження на дві рівні групи по n1=n2=17 спостережень
7. Перевірити гіпотезу про наявність автокореляції залишків з рівнем надійності, 1-α=0.95
8. Зі змінної у виділити сезонні коливання з та без трендового компонента

X1={18, 72, 62, 15, 75, 40, 52, 44, 56, 75, 21, 46, 64, 26, 39, 24, 65, 56, 22, 53, 76, 52, 14, 39, 71, 56, 28, 37, 72, 29, 52, 69, 29, 30, 45, 37, 41, 17};
X2={59, 64, 67, 70, 78, 69, 71, 88, 53, 54, 37, 64, 79, 65, 61, 56, 56, 69, 49, 75, 75, 48, 59, 74, 59, 47, 81, 76, 55, 78, 91, 72, 79, 64, 63, 61, 44, 75};
X3={148, 169, 160, 142, 172, 147, 152, 164, 168, 136, 144, 164, 139, 161, 158, 141, 175, 166, 150, 170, 174, 155, 156, 149, 167, 131, 153, 172, 139, 165, 168, 175, 179, 159, 162, 136, 167, 184};
X4={45, 62, 59, 43, 57, 57, 18, 46, 32, 60, 53, 44, 57, 48, 33, 55, 31, 21, 47, 60, 20, 23, 43, 49, 42, 28, 51, 19, 52, 39, 46, 40, 33, 46, 59, 64, 43, 65};
Y={155, 144, 128, 133, 139, 134, 151, 193, 145, 169, 144, 156, 135, 140, 154, 161, 111, 141, 131, 141, 139, 139, 153, 120, 125, 160, 144, 153, 150, 141, 130, 149, 150, 125, 151, 171, 136, 150};

Варіант № 4

1. Для поданих рядів побудувати регресію виду

   y=b0 + b1 x1 + b2 x3 + b3 Log[x2]

2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 1-α=0.99
3. Перевірити гіпотезу H0: b3=12 з рівнем надійності 1-α=0.99
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.99, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 16 спостережень
5. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.99, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 44 спостереження
6. Перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності за критерієм Голдфелда-Квондта з рівнем надійності 1-α=0.99, розбивши спостереження на дві рівні групи по n1=n2=22 спостережень
7. Перевірити гіпотезу про наявність автокореляції залишків з рівнем надійності, 1-α=0.95
8. Зі змінної y виділити сезонні коливання з та без трендового компонента

X1={25, 37, 51, 55, 31, 67, 33, 26, 33, 69, 51, 67, 72, 42, 60, 60, 66, 40, 26, 31, 24, 31, 71, 39, 72, 67, 42, 57, 64, 23, 31, 54, 54, 27, 53, 60, 54, 58, 66, 23, 61, 41, 62, 65, 59, 33, 65, 49, 60};

X2={123, 110, 102, 101, 107, 122, 133, 145, 119, 116, 80, 113, 88, 90, 125, 122, 97, 132, 85, 136, 99, 115, 136, 126, 84, 94, 126, 118, 107, 118, 134, 129, 112, 120, 117, 142, 99, 101, 129, 114, 105, 129, 102, 136, 106, 138, 136, 139, 105};

X3={137, 126, 161, 141, 119, 123, 164, 140, 175, 143, 128, 135, 155, 147, 154, 167, 132, 131, 152, 153, 151, 179, 148, 149, 170, 181, 156, 162, 148, 143, 120, 165, 147, 157, 141, 168, 146, 166, 144, 150, 176, 158, 144, 164, 178, 145, 122, 143, 158};

Y={139, 192, 229, 146, 119, 169, 49, 131, 139, 32, 200, 100, 121, 52, 234, 29, 72, 169, 153, 184, 191, 131, 170, 100, 68, 174, 176, 189, 183, 21, 143, 73, 60, 223, 177, 208, 173, 187, 177, 194, 117, 34, 40, 26, 161, 138, 104, 161, 109};

Варіант № 5

1. Для поданих рядів побудувати регресію виду

   y=b0 + b1 x1 + b2 x2 + b3 x3 + b4 Log[x3 x4]

2. Перевірити модель на адекватність з рівнем надійності 1-α=0.99
3. Перевірити гіпотезу H0: b2=13 з рівнем надійності 1-α=0.99
4. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.99, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 13 спостережень
5. Перевірити гіпотезу про стійкість моделі з рівнем надійності 1-α=0.99, розбивши всі спостереження на групи, перша з яких містить 35 спостережень
6. Перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності за критерієм Голдфелда-Квондта з рівнем надійності 1-α=0.99, розбивши спостереження на дві рівні групи по n1=n2=18 спостережень
7. Перевірити гіпотезу про наявність автокореляції залишків з рівнем надійності, 1-α=0.95
8. Зі змінної y виділити сезонні коливання з та без трендового компонента

X1={192, 150, 180, 38, 140, 110, 190, 90, 164, 165, 36, 141, 201, 74, 216, 120, 191, 140, 106, 40, 60, 56, 138, 105, 85, 123, 176, 87, 162, 33, 203, 214, 214, 84, 187, 93, 34, 30, 188};
X2={208, 232, 231, 213, 233, 224, 232, 263, 222, 232, 206, 219, 230, 209, 230, 234, 228, 232, 246, 231, 224, 226, 212, 203, 214, 235, 224, 229, 239, 222, 249, 206, 217, 204, 232, 226, 220, 235, 222};
X3={40, 20, 19, 32, 36, 16, 56, 49, 25, 49, 49, 31, 40, 53, 54, 39, 40, 30, 26, 39, 47, 18, 24, 32, 20, 56, 17, 13, 42, 52, 19, 22, 29, 16, 29, 49, 47, 21, 33};
X4={77, 24, 63, 44, 68, 84, 29, 32, 72, 76, 28, 61, 83, 64, 93, 32, 78, 35, 28, 51, 63, 80, 92, 39, 79, 68, 41, 88, 23, 77, 25, 69, 44, 13, 90, 20, 55, 42, 90};
Y={224, 245, 227, 214, 201, 250, 218, 219, 214, 227, 203, 194, 194, 182, 241, 255, 201, 228, 234, 219, 223, 255, 198, 206, 243, 232, 259, 240, 210, 238, 163, 219, 217, 218, 215, 242, 195, 246, 193};

Відповіді на варіанти контрольних робіт в середовищі „Mathematica”

Варіант № 1

1. b={-1.35708, 1.50539, 0.961791, -0.0146053}; R^2=0.0751477; PValue=0.227471
2. R^2=0.0751477; Fpr=1.48965; Fteor(3, 55, 0.95)=2.77254 => Модель неадекватна
3. tpr=18.4939; tteor(55, 0.95)=2.00404 => Гіпотеза відхиляється
4. Fpr=1.61162; Fteor(4, 51, 0.95)=2.5534 => Гіпотеза приймається
5. Fpr=1.37296; Fteor(6, 49, 0.95)=2.29043 => Гіпотеза приймається
6. Fpr=1.94536; Fteor(23, 23, 0.95)=2.01442 => Гетероскедастичність відсутня
7. Статистика Дарбіна-Уотсона=2.09345 => Автокореляція відсутня
8. Без тренда: R^2=0.0135; Fpr=0.25098; Fteor(3, 55, 0.95)=2.773 => Модель неадекватна;

З трендом: R^2=0.031875; Fpr=0.44448; Fteor(4, 54, 0.95)=2.54292 => Модель неадекватна

Варіант № 2

1. b={-70.4166, 1.78571, 0.262966, -0.0127496, 0.60923, -0.011969}; R^2=0.0466097; PValue=0.858501
2. R^2=0.0466097; Fpr=0.38133; Fteor(5, 39, 0.95)=2.45583 => Модель неадекватна
3. tpr=27.2442; tteor(39, 0.95)=2.02269 => Гіпотеза відхиляється
4. Fpr=1.4751; Fteor(6, 33, 0.95)=2.38939 => Гіпотеза приймається
5. Fpr=0.863359; Fteor(5, 34, 0.95)=2.49362 => Гіпотеза приймається
6. Fpr=1.34174; Fteor(14, 14, 0.95)=2.48373 => Гетероскедастичність відсутня
7. Статистика Дарбіна-Уотсона=2.01974 => Автокореляція відсутня
8. Без тренда: R^2=0.0893; Fpr=1.340; Fteor(3, 41, 0.95)=2.83275 => Модель неадекватна;

З трендом: R^2=0.0897; Fpr=0.985517; Fteor(4, 40, 0.95)=2.60597 => Модель неадекватна

Варіант № 3
1. b={194.727, -0.0629172, 0.184337, -0.305383, -1.25908}; R^2=0.0744456; PValue=0.62175
2. R^2=0.0744456; Fpr=0.663577; Fteor(4, 33, 0.9)=2.12343 => Модель неадекватна
3. tpr=1.6689; tteor(33, 0.9)=1.69236 => Гіпотеза приймається
4. Fpr=0.52881; Fteor(5, 28, 0.9)=2.06447 => Гіпотеза приймається
5. Fpr=0.73223; Fteor(4, 29, 0.9)=2.14941 => Гіпотеза приймається
6. Fpr=1.85304; Fteor(12, 12, 0.9)=2.14744 => Гетероскедастичність відсутня
7. Статистика Дарбіна-Уотсона=1.9346 => Автокореляція відсутня
8. Без тренда: R^2=0.1211; Fpr=1.56095; Fteor(3, 34, 0.9)=2.25239 => Модель неадекватна;
З трендом: R^2=0.123686; Fpr=1.16444; Fteor(4, 33, 0.9)=2.12343 => Модель неадекватна

Варіант № 4
1. b={246.133, -0.470209, -0.0625312, -16.8014}; R^2=0.0158865; PValue=0.866468
2. R^2=0.0158865; Fpr=0.242144; Fteor(3, 45, 0.99)=4.24921 => Модель неадекватна
3. tpr=0.478537; tteor(45, 0.99)=2.68959 => Гіпотеза приймається
4. Fpr=0.432578; Fteor(4, 41, 0.99)=3.81484 => Гіпотеза приймається
5. Fpr=0.141245; Fteor(5, 40, 0.99)=3.51384 => Гіпотеза приймається
6. Fpr=1.2173; Fteor(18, 18, 0.99)=3.12801 => Гетероскедастичність відсутня
7. Статистика Дарбіна-Уотсона=1.89534 => Автокореляція відсутня
8. Без тренда: R^2=0.0381; Fpr=0.5935; Fteor(3, 45, 0.99)=4.24921 => Модель неадекватна;
З трендом: R^2=0.043641; Fpr=0.50196; Fteor(4, 44, 0.99)=3.77841 => Модель неадекватна

Варіант № 5
1. b={174.281, -0.0866327, 0.295686, -0.40897, 0.617442}; R^2=0.110561; PValue=0.392912
2. R^2=0.110561; Fpr=1.05659; Fteor(4, 34, 0.99)=3.92733 => Модель неадекватна
3. tpr=44.1279; tteor(34, 0.99)=2.72839 => Гіпотеза відхиляється
4. Fpr=0.372362; Fteor(5, 29, 0.99)=3.7254 => Гіпотеза приймається
5. Fpr=1.13187; Fteor(4, 30, 0.99)=4.01788 => Гіпотеза приймається
6. Fpr=1.67014; Fteor(13, 13, 0.99)=3.9052 => Гетероскедастичність відсутня
7. Статистика Дарбіна-Уотсона=2.09107 => Автокореляція відсутня
8. Без тренда: R^2=0.1314; Fpr=1.7645; Fteor(3, 35, 0.99)=4.39575 => Модель неадекватна;
З трендом: R^2=0.132857; Fpr=1.30231; Fteor(4, 34, 0.99)=3.92733 => Модель неадекватна

Розв'язок задач в MS Excel XP

Для оцінки регресій в MS Excel необхідно перевірити наявність пакету аналізу. В головному меню слід вибрати **Сервис-Надстройки** і включити пакет аналізу:

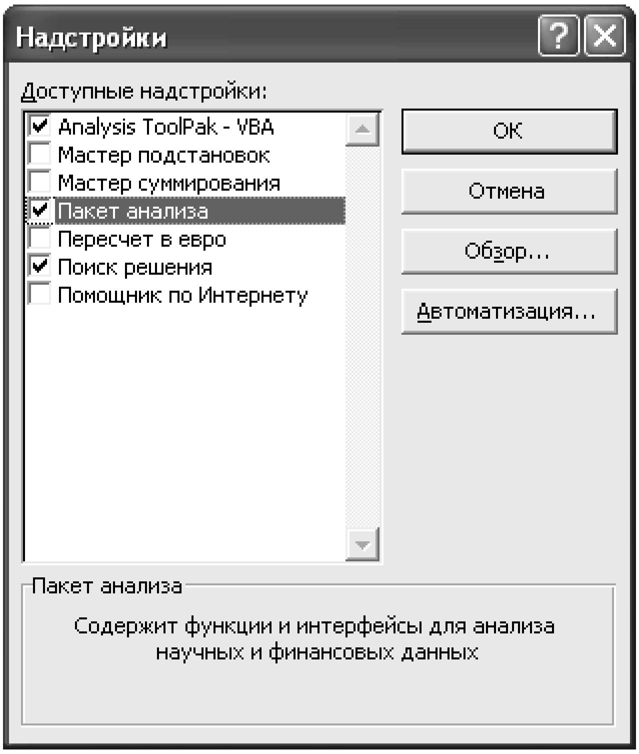


Рисунок 1.

Приклади розв'язання задач в MS Excel XP

Приклад 1. Для поданих значень факторів Y,X1,X2 побудувати регресію виду $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t$.

Y	X1	X2
39,1	15,8	48,4
57,7	13,0	55,8
41,3	18,0	49,5
21,3	21,0	35,7
16,2	20,8	31,6
28,2	21,6	36,5
41,3	12,1	41,3
40,1	16,1	46,2
21,4	20,6	34,0

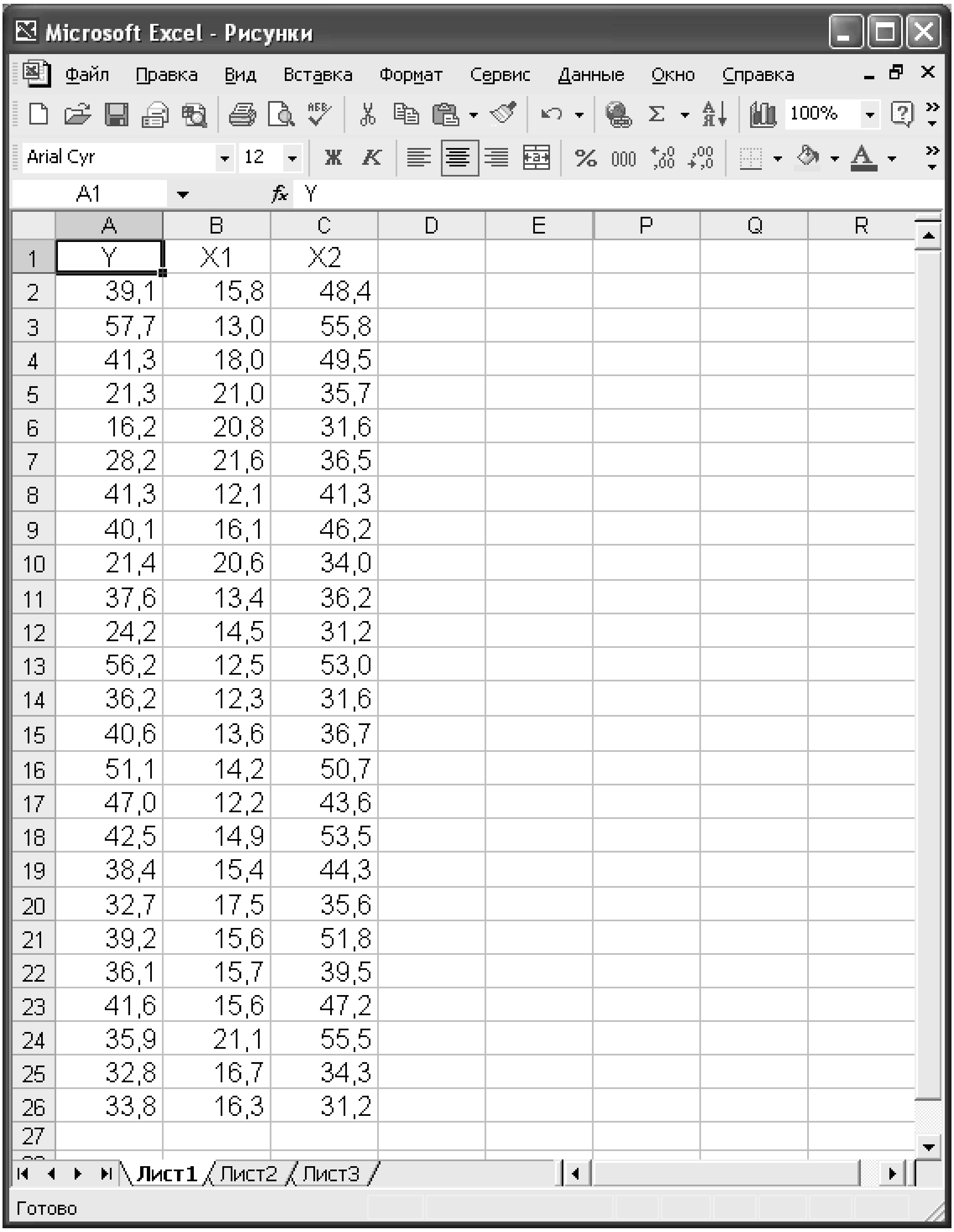
Y	X1	X2
37,6	13,4	36,2
24,2	14,5	31,2
56,2	12,5	53,0
36,2	12,3	31,6
40,6	13,6	36,7
51,1	14,2	50,7
47,0	12,2	43,6
42,5	14,9	53,5
38,4	15,4	44,3

Y	X1	X2
32,7	17,5	35,6
39,2	15,6	51,8
36,1	15,7	39,5
41,6	15,6	47,2
35,9	21,1	55,5
32,8	16,7	34,3
33,8	16,3	31,2

Перевірити модель на адекватність, коефіцієнти на значущість, $\alpha = 0,05$.

Розв'язок.

Вводимо початкові дані до MS Excel в стовпчики A, B та C:



	A	B	C
1	Y	X1	X2
2	39,1	15,8	48,4
3	57,7	13,0	55,8
4	41,3	18,0	49,5
5	21,3	21,0	35,7
6	16,2	20,8	31,6
7	28,2	21,6	36,5
8	41,3	12,1	41,3
9	40,1	16,1	46,2
10	21,4	20,6	34,0
11	37,6	13,4	36,2
12	24,2	14,5	31,2
13	56,2	12,5	53,0
14	36,2	12,3	31,6
15	40,6	13,6	36,7
16	51,1	14,2	50,7
17	47,0	12,2	43,6
18	42,5	14,9	53,5
19	38,4	15,4	44,3
20	32,7	17,5	35,6
21	39,2	15,6	51,8
22	36,1	15,7	39,5
23	41,6	15,6	47,2
24	35,9	21,1	55,5
25	32,8	16,7	34,3
26	33,8	16,3	31,2

Рисунок 2.

В головному меню вибираємо **Сервис-Анализ данных-Регрессия. Найважливіші опції вказані в таблиці:**

Входной интервал Y:	Діапазон значень залежної змінної.
Входной интервал X:	Діапазон значень незалежних змінних. Зауважте, що незалежні змінні повинні знаходитися в сусідніх стовпчиках.
Метки	Опція, що вказує, чи містить перший рядок назви стовпчиків
Константа - ноль	Опція, що вказує на наявність чи відсутність константи в регресії
Параметри виводу	Адреса верхньої лівої чарунки для виводу результатів обчислень. Якщо вказується опція «Новый рабочий лист», то результати виводяться на новий лист.

Заповнюємо діалогове вікно згідно з параметрами нашої задачі:

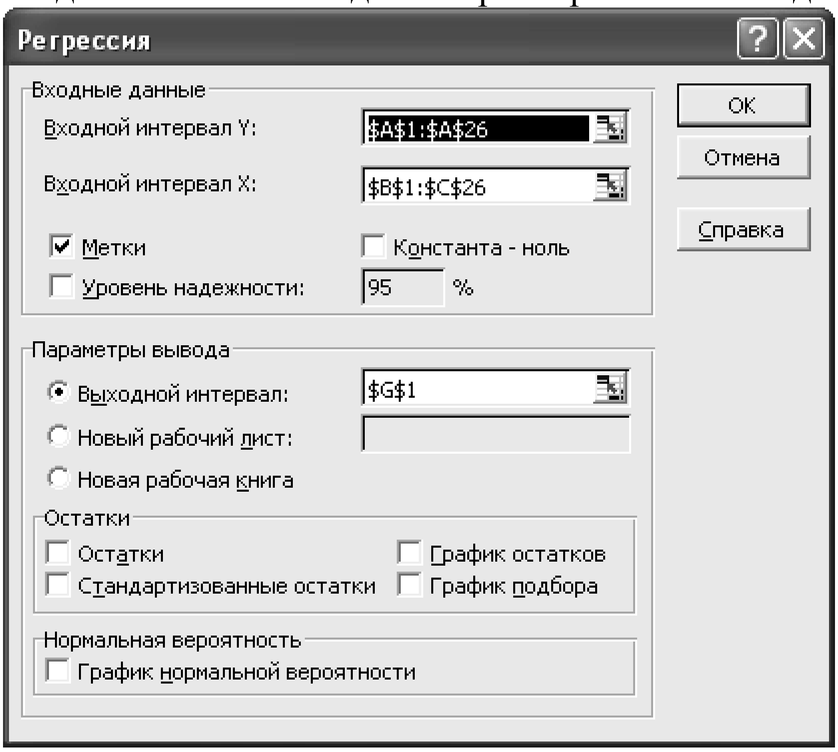
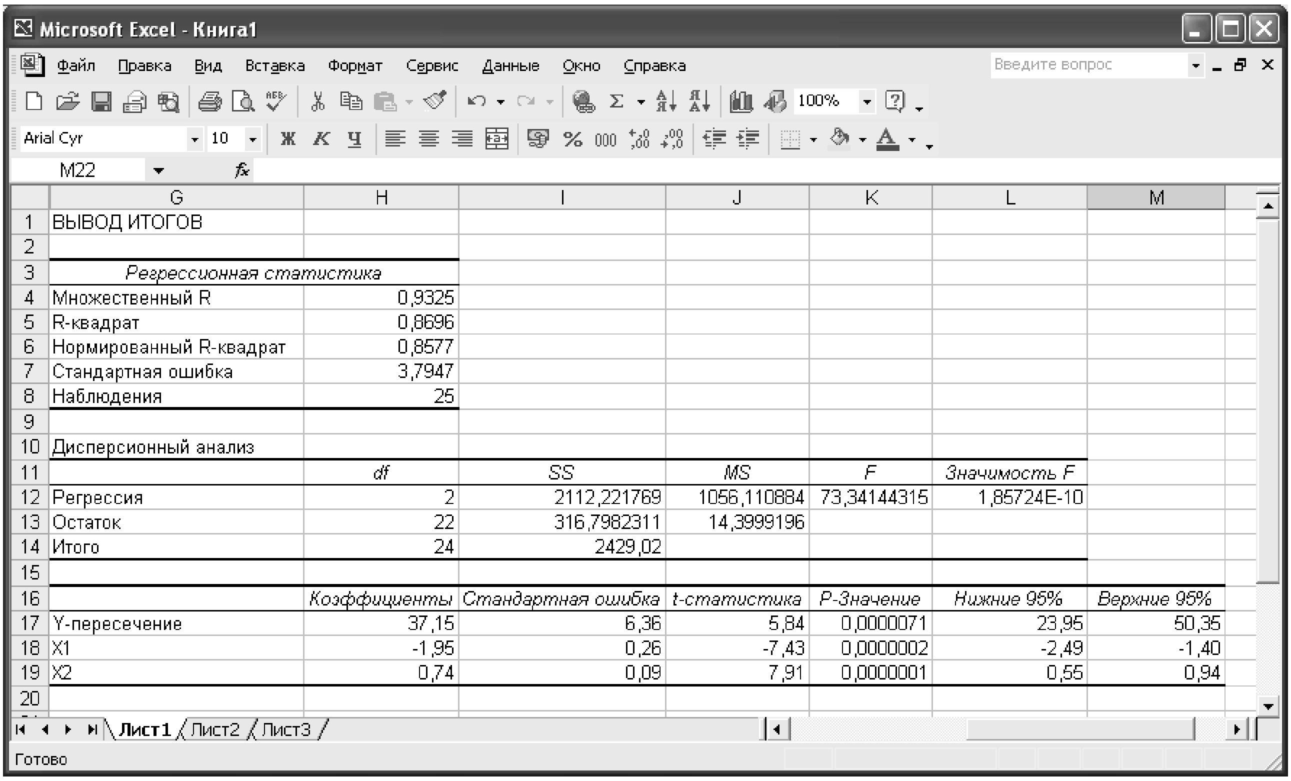


Рисунок 3.

Результати регресійного аналізу показані на рис. 3.



	G	H	I	J	K	L	M
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,9325					
5	R-квадрат	0,8696					
6	Нормированный R-квадрат	0,8577					
7	Стандартная ошибка	3,7947					
8	Наблюдения	25					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	2	2112,221769	1056,110884	73,34144315	1,85724E-10	
13	Остаток	22	316,7982311	14,3999196			
14	Итого	24	2429,02				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	37,15	6,36	5,84	0,0000071	23,95	50,35
18	X1	-1,95	0,26	-7,43	0,0000002	-2,49	-1,40
19	X2	0,74	0,09	7,91	0,0000001	0,55	0,94
20							

Рисунок 4.

Вибіркова регресійна функція має вигляд $\hat{Y}_t = 37,15 - 1,95X_1 + 0,74X_2$, $R^2 = 0,87$, $\hat{\sigma}^2 = 3,79$, $RSS = 2112,2$, $ESS = 316,798$, $TSS = 2429,02$.

Практичнее значення статистики Фішера $F_{pr} = 73,34$, імовірність того, що модель неадеватна («Значимость F») значно менше рівня похибки $\alpha = 0,05$.

Коефіцієнти моделі значимі, оскільки всі значення стовпчику «Р-Значение» менші за $\alpha = 0,05$.

Питання на залік по курсу

1. Визначення економетрії як науки, її природа. Приклади використання економетричних моделей для розв’язування економічних задач.
2. Роль економетричних досліджень в економіці.
3. Предмет, цілі, задачі курсу “Економетрика”.
4. Взаємозв’язки курсу із суміжними дисциплінами.
5. Основні типи економетричних моделей. Змінні та рівняння в економетричних моделях.
6. Етапи економетричного моделювання економічних процесів та явищ.
7. Загальний вигляд лінійної економетричної моделі та етапи її побудови.
8. Специфікація економетричної моделі.
9. Передумови застосування методу найменших квадратів (МНК).
10. Метод найменших квадратів.
11. Властивості статистичних оцінок параметрів, їх характеристика.
12. Поняття адекватності і точності економетричної моделі .
13. Перевірка значущості оцінок параметрів економетричної моделі, статистичні критерії.
14. Перевірка статистичної значущості економетричної моделі в цілому, статистичні критерії.
15. Дисперсійний аналіз лінійної регресії.
16. Інтервальний прогноз залежної змінної на основі економетричної моделі. Стандартні помилки та надійність прогнозу.
17. Проста лінійна регресія. Структура моделі та основні припущення при її побудові.
18. Коефіцієнт детермінації.
19. Властивості параметрів регресії.
20. Залишки моделі. Дисперсія моделі.
21. Гіпотеза про значимість коефіцієнта регресії.
22. Гіпотеза про лінійні обмеження на коефіцієнти моделі.
23. Перевірка моделі на адекватність.
24. Перевірка моделі на стійкість.
25. Прогнозування за допомогою простої лінійної регресії.
26. Моделі, які зводяться до моделі множинної лінійної регресії. Приклади застосування простої лінійної регресії.

27. Множинна лінійна регресія. Структура моделі та основні припущення при її побудові. Оцінка моделі.
28. Моделі, які зводяться до моделі множинної лінійної регресії.
29. Виділення сезонних коливань.
30. Економетрична лінійна модель на основі нормалізованих даних.
31. Регресійні залежності довільного типу.
32. Модель Коба-Дугласа та її оцінка.
33. Інтерпретація коефіцієнтів регресії. Порівняння факторів за ступенем їх впливу. Економічний зміст коефіцієнтів регресії.
34. Поняття мультиколінеарності, її природа.
35. Вплив мультиколінеарності на оцінки параметрів моделі.
36. Методи визначення мультиколінеарності та способи її усунення.
37. Поняття гомо- й гетероскедастичності, природа гетероскедастичності.
38. Вплив гетероскедастичності на оцінки параметрів моделі.
39. Метод перевірки гетероскедастичності на основі тесту Голдфелда-Квондта.
40. Тест Глейзера для виявлення гетероскедастичності.
41. Критерій Уайта для виявлення гетероскедастичності.
42. Зважений метод найменших квадратів оцінювання параметрів лінійної економетричної моделі з гетероскедастичними залишками.
43. Точковий та інтервальний прогноз залежної змінної при гетероскедастичності.
44. Сутність автокореляції, її природа. Наслідки автокореляції в економетричному моделюванні.
45. Методи визначення автокореляції.
46. Критерій Дарбіна-Уотсона перевірки наявності автокореляції.
47. Метод перетворення вихідної інформації для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками.
48. Метод Кочрейна-Оркатта (загальна характеристика).
49. Метод Дарбіна (загальна характеристика).
50. Прогноз в моделях з автокорельованими залишками.
51. Узагальнений метод найменших квадратів у випадку відомої кореляційної матриці збурень.
52. Авторегресія першого порядку.
53. Авторегресія другого порядку.

54. Оцінювання моделі з автокорельованими збуреннями у випадку невідомої кореляційної матриці збурень.
55. Системи одночасних структурних рівнянь. Перехід до зведеної форми, їх взаємозв'язок.
56. Приклади систем одночасних рівнянь на макрорівні.
57. Поняття ідентифікації. Строго ідентифікована, неідентифікована і надідентифікована системи рівнянь.
58. Проблеми оцінювання параметрів системи, загальна характеристика методів.
59. Непрямий метод найменших квадратів оцінювання параметрів строго ідентифікованих рівнянь системи.
60. Розрахунок параметрів системи економетричних рівнянь попиту і пропозиції непрямим методом найменших квадратів.
61. Двоетапний метод найменших квадратів (2МНК – оцінка). Алгоритм.
62. Методи оцінювання параметрів надідентифікованих структурних рівнянь.
63. Рекурсивні системи одночасних рівнянь, їх характеристика.
64. Методи специфікації моделей.
65. Безумовне прогнозування за допомогою регресії. Умовне прогнозування за допомогою регресії.
66. Метод максимальної правдоподібності. Використання оцінок максимальної правдоподібності.
67. Порядок аналізу часових рядів. Адитивна та мультиплікативна моделі часових рядів.
68. Лаговий оператор.
69. Міри точності прогнозів.
70. Стаціонарність часових рядів.
71. Метод усереднення, подвійне усереднення, процентне диференціювання, процентна різниця).
72. Методи експоненціального згладжування: звичайне, подвійне, потрійне.
73. Побудова лінійної та лінійно-логарифмічної виробничої функції. Економетричний аналіз виробничих функцій, інтерпретація результатів.
74. Перспективи економетрики.

Додатки

Алгоритм вибору методу для оцінки моделі

Статистичні таблиці

Таблиця 1. Значення *t*-статистики Стьюдента.

n	Рівень надійності, $1-\alpha$				
	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
1	3,078	6,314	12,706	63,656	636,578
2	1,886	2,920	4,303	9,925	31,600
3	1,638	2,353	3,182	5,841	12,924
4	1,533	2,132	2,776	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	3,499	5,408
8	1,397	1,860	2,306	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,807	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,771	3,689
28	1,313	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,756	3,660

n	Рівень надійності, $1-\alpha$				
	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
30	1,310	1,697	2,042	2,750	3,646
31	1,309	1,696	2,040	2,744	3,633
32	1,309	1,694	2,037	2,738	3,622
33	1,308	1,692	2,035	2,733	3,611
34	1,307	1,691	2,032	2,728	3,601
35	1,306	1,690	2,030	2,724	3,591
36	1,306	1,688	2,028	2,719	3,582
37	1,305	1,687	2,026	2,715	3,574
38	1,304	1,686	2,024	2,712	3,566
39	1,304	1,685	2,023	2,708	3,558
40	1,303	1,684	2,021	2,704	3,551
45	1,301	1,679	2,014	2,690	3,520
50	1,299	1,676	2,009	2,678	3,496
55	1,297	1,673	2,004	2,668	3,476
60	1,296	1,671	2,000	2,660	3,460
65	1,295	1,669	1,997	2,654	3,447
70	1,294	1,667	1,994	2,648	3,435
75	1,293	1,665	1,992	2,643	3,425
80	1,292	1,664	1,990	2,639	3,416
85	1,292	1,663	1,988	2,635	3,409
90	1,291	1,662	1,987	2,632	3,402
95	1,291	1,661	1,985	2,629	3,396
100	1,290	1,660	1,984	2,626	3,390
120	1,289	1,658	1,980	2,617	3,373
140	1,288	1,656	1,977	2,611	3,361
160	1,287	1,654	1,975	2,607	3,352
180	1,286	1,653	1,973	2,603	3,345
200	1,286	1,653	1,972	2,601	3,340
1000	1,282	1,646	1,962	2,581	3,300

Таблиця 2. Значення χ^2-статистики.

n	Рівень надійності, $1-\alpha$							
	0,001	0,01	0,05	0,1	0,9	0,95	0,99	0,999
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	6,63	10,83
2	0,00	0,02	0,10	0,21	4,61	5,99	9,21	13,82
3	0,02	0,11	0,35	0,58	6,25	7,81	11,34	16,27
4	0,09	0,30	0,71	1,06	7,78	9,49	13,28	18,47
5	0,21	0,55	1,15	1,61	9,24	11,07	15,09	20,51
6	0,38	0,87	1,64	2,20	10,64	12,59	16,81	22,46
7	0,60	1,24	2,17	2,83	12,02	14,07	18,48	24,32
8	0,86	1,65	2,73	3,49	13,36	15,51	20,09	26,12
9	1,15	2,09	3,33	4,17	14,68	16,92	21,67	27,88
10	1,48	2,56	3,94	4,87	15,99	18,31	23,21	29,59
11	1,83	3,05	4,57	5,58	17,28	19,68	24,73	31,26
12	2,21	3,57	5,23	6,30	18,55	21,03	26,22	32,91
13	2,62	4,11	5,89	7,04	19,81	22,36	27,69	34,53
14	3,04	4,66	6,57	7,79	21,06	23,68	29,14	36,12
15	3,48	5,23	7,26	8,55	22,31	25,00	30,58	37,70
16	3,94	5,81	7,96	9,31	23,54	26,30	32,00	39,25
17	4,42	6,41	8,67	10,09	24,77	27,59	33,41	40,79
18	4,90	7,01	9,39	10,86	25,99	28,87	34,81	42,31
19	5,41	7,63	10,12	11,65	27,20	30,14	36,19	43,82
20	5,92	8,26	10,85	12,44	28,41	31,41	37,57	45,31
21	6,45	8,90	11,59	13,24	29,62	32,67	38,93	46,80
22	6,98	9,54	12,34	14,04	30,81	33,92	40,29	48,27
23	7,53	10,20	13,09	14,85	32,01	35,17	41,64	49,73
24	8,08	10,86	13,85	15,66	33,20	36,42	42,98	51,18
25	8,65	11,52	14,61	16,47	34,38	37,65	44,31	52,62
26	9,22	12,20	15,38	17,29	35,56	38,89	45,64	54,05
27	9,80	12,88	16,15	18,11	36,74	40,11	46,96	55,48
28	10,39	13,56	16,93	18,94	37,92	41,34	48,28	56,89
29	10,99	14,26	17,71	19,77	39,09	42,56	49,59	58,30
30	11,59	14,95	18,49	20,60	40,26	43,77	50,89	59,70
31	12,20	15,66	19,28	21,43	41,42	44,99	52,19	61,10
32	12,81	16,36	20,07	22,27	42,58	46,19	53,49	62,49
33	13,43	17,07	20,87	23,11	43,75	47,40	54,78	63,87
34	14,06	17,79	21,66	23,95	44,90	48,60	56,06	65,25
35	14,69	18,51	22,47	24,80	46,06	49,80	57,34	66,62
36	15,32	19,23	23,27	25,64	47,21	51,00	58,62	67,98
37	15,97	19,96	24,07	26,49	48,36	52,19	59,89	69,35
38	16,61	20,69	24,88	27,34	49,51	53,38	61,16	70,70
39	17,26	21,43	25,70	28,20	50,66	54,57	62,43	72,06
40	17,92	22,16	26,51	29,05	51,81	55,76	63,69	73,40
45	21,25	25,90	30,61	33,35	57,51	61,66	69,96	80,08
50	24,67	29,71	34,76	37,69	63,17	67,50	76,15	86,66
55	28,17	33,57	38,96	42,06	68,80	73,31	82,29	93,17
60	31,74	37,48	43,19	46,46	74,40	79,08	88,38	99,61
65	35,36	41,44	47,45	50,88	79,97	84,82	94,42	105,99
70	39,04	45,44	51,74	55,33	85,53	90,53	100,43	112,32
75	42,76	49,48	56,05	59,79	91,06	96,22	106,39	118,60
80	46,52	53,54	60,39	64,28	96,58	101,88	112,33	124,84
85	50,32	57,63	64,75	68,78	102,08	107,52	118,24	131,04
90	54,16	61,75	69,13	73,29	107,57	113,15	124,12	137,21
95	58,02	65,90	73,52	77,82	113,04	118,75	129,97	143,34
100	61,92	70,06	77,93	82,36	118,50	124,34	135,81	149,45
120	77,76	86,92	95,70	100,62	140,23	146,57	158,95	173,62
140	93,93	104,03	113,66	119,03	161,83	168,61	181,84	197,45
160	110,36	121,35	131,76	137,55	183,31	190,52	204,53	221,02
180	127,01	138,82	149,97	156,15	204,70	212,30	227,06	244,37
200	143,84	156,43	168,28	174,84	226,02	233,99	249,45	267,54

Таблиця 3. Значення F-статистики Фішера з рівнем значимості $1-\alpha = 0,8$.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	60	120	1000
1	9,47	12,0	13,1	13,6	14,0	14,3	14,4	14,6	14,7	14,8	14,9	15,0	15,1	15,1	15,2	15,3	15,4	15,4	15,5	15,6
2	3,56	4,00	4,16	4,24	4,28	4,32	4,34	4,36	4,37	4,38	4,40	4,41	4,42	4,43	4,43	4,45	4,46	4,46	4,47	4,48
3	2,68	2,89	2,94	2,96	2,97	2,97	2,97	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98
4	2,35	2,47	2,48	2,48	2,48	2,47	2,47	2,47	2,46	2,46	2,46	2,45	2,45	2,45	2,44	2,44	2,44	2,43	2,43	2,43
5	2,18	2,26	2,25	2,24	2,23	2,22	2,21	2,20	2,20	2,19	2,18	2,18	2,17	2,17	2,17	2,16	2,15	2,15	2,14	2,14
6	2,07	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06	2,05	2,04	2,03	2,03	2,02	2,01	2,00	2,00	2,00	1,98	1,98	1,97	1,96	1,96
7	2,00	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,93	1,92	1,91	1,90	1,89	1,88	1,88	1,86	1,86	1,85	1,84	1,83
8	1,95	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,83	1,82	1,81	1,80	1,80	1,78	1,77	1,76	1,75	1,74
9	1,91	1,93	1,90	1,87	1,85	1,83	1,81	1,80	1,79	1,78	1,76	1,75	1,74	1,74	1,73	1,71	1,70	1,69	1,68	1,67
10	1,88	1,90	1,86	1,83	1,80	1,78	1,77	1,75	1,74	1,73	1,72	1,70	1,70	1,69	1,68	1,66	1,65	1,64	1,63	1,62
11	1,86	1,87	1,83	1,80	1,77	1,75	1,73	1,72	1,70	1,69	1,68	1,67	1,66	1,65	1,64	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58
12	1,84	1,85	1,80	1,77	1,74	1,72	1,70	1,69	1,67	1,66	1,65	1,63	1,62	1,62	1,61	1,59	1,58	1,56	1,55	1,54
13	1,82	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,68	1,66	1,65	1,64	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,56	1,55	1,53	1,52	1,51
14	1,81	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,65	1,64	1,63	1,62	1,60	1,58	1,57	1,56	1,56	1,53	1,52	1,51	1,49	1,48
15	1,80	1,80	1,75	1,71	1,68	1,66	1,64	1,62	1,61	1,60	1,58	1,56	1,55	1,54	1,54	1,51	1,50	1,49	1,47	1,46
16	1,79	1,78	1,74	1,70	1,67	1,64	1,62	1,61	1,59	1,58	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,49	1,48	1,47	1,45	1,44
17	1,78	1,77	1,72	1,68	1,65	1,63	1,61	1,59	1,58	1,57	1,55	1,53	1,52	1,51	1,50	1,48	1,46	1,45	1,43	1,42
18	1,77	1,76	1,71	1,67	1,64	1,62	1,60	1,58	1,56	1,55	1,53	1,52	1,51	1,50	1,49	1,46	1,45	1,43	1,42	1,40
19	1,76	1,75	1,70	1,66	1,63	1,61	1,58	1,57	1,55	1,54	1,52	1,51	1,49	1,48	1,48	1,45	1,44	1,42	1,40	1,39
20	1,76	1,75	1,70	1,65	1,62	1,60	1,58	1,56	1,54	1,53	1,51	1,50	1,48	1,47	1,47	1,44	1,42	1,41	1,39	1,37
21	1,75	1,74	1,69	1,65	1,61	1,59	1,57	1,55	1,53	1,52	1,50	1,49	1,47	1,46	1,46	1,43	1,41	1,40	1,38	1,36
22	1,75	1,73	1,68	1,64	1,61	1,58	1,56	1,54	1,53	1,51	1,49	1,48	1,47	1,45	1,45	1,42	1,40	1,39	1,37	1,35
23	1,74	1,73	1,68	1,63	1,60	1,57	1,55	1,53	1,52	1,51	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44	1,41	1,39	1,38	1,36	1,34
24	1,74	1,72	1,67	1,63	1,59	1,57	1,55	1,53	1,51	1,50	1,48	1,46	1,45	1,44	1,43	1,40	1,39	1,37	1,35	1,33
25	1,73	1,72	1,66	1,62	1,59	1,56	1,54	1,52	1,51	1,49	1,47	1,46	1,44	1,43	1,42	1,39	1,38	1,36	1,34	1,32
26	1,73	1,71	1,66	1,62	1,58	1,56	1,53	1,52	1,50	1,49	1,47	1,45	1,44	1,43	1,42	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31
27	1,73	1,71	1,66	1,61	1,58	1,55	1,53	1,51	1,49	1,48	1,46	1,44	1,43	1,42	1,41	1,38	1,36	1,35	1,33	1,31
28	1,72	1,71	1,65	1,61	1,57	1,55	1,52	1,51	1,49	1,48	1,46	1,44	1,43	1,41	1,41	1,37	1,36	1,34	1,32	1,30
29	1,72	1,70	1,65	1,60	1,57	1,54	1,52	1,50	1,49	1,47	1,45	1,43	1,42	1,41	1,40	1,37	1,35	1,33	1,31	1,29
30	1,72	1,70	1,64	1,60	1,57	1,54	1,52	1,50	1,48	1,47	1,45	1,43	1,42	1,40	1,39	1,36	1,35	1,33	1,31	1,29
31	1,71	1,70	1,64	1,60	1,56	1,53	1,51	1,49	1,48	1,46	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,36	1,34	1,32	1,30	1,28
32	1,71	1,69	1,64	1,59	1,56	1,53	1,51	1,49	1,47	1,46	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,35	1,34	1,32	1,30	1,28

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	60	120	1000
33	1,71	1,69	1,64	1,59	1,56	1,53	1,50	1,49	1,47	1,46	1,43	1,42	1,40	1,39	1,38	1,35	1,33	1,31	1,29	1,27
34	1,71	1,69	1,63	1,59	1,55	1,52	1,50	1,48	1,47	1,45	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,35	1,33	1,31	1,29	1,27
35	1,71	1,69	1,63	1,58	1,55	1,52	1,50	1,48	1,46	1,45	1,43	1,41	1,40	1,38	1,37	1,34	1,32	1,30	1,28	1,26
36	1,70	1,68	1,63	1,58	1,55	1,52	1,50	1,48	1,46	1,45	1,42	1,41	1,39	1,38	1,37	1,34	1,32	1,30	1,28	1,26
37	1,70	1,68	1,63	1,58	1,54	1,52	1,49	1,47	1,46	1,44	1,42	1,40	1,39	1,38	1,37	1,34	1,32	1,30	1,27	1,25
38	1,70	1,68	1,62	1,58	1,54	1,51	1,49	1,47	1,46	1,44	1,42	1,40	1,39	1,38	1,37	1,33	1,31	1,29	1,27	1,25
39	1,70	1,68	1,62	1,58	1,54	1,51	1,49	1,47	1,45	1,44	1,42	1,40	1,38	1,37	1,36	1,33	1,31	1,29	1,27	1,24
40	1,70	1,68	1,62	1,57	1,54	1,51	1,49	1,47	1,45	1,44	1,41	1,40	1,38	1,37	1,36	1,33	1,31	1,29	1,26	1,24
45	1,69	1,67	1,61	1,57	1,53	1,50	1,48	1,46	1,44	1,43	1,40	1,38	1,37	1,36	1,35	1,31	1,29	1,27	1,25	1,22
50	1,69	1,66	1,60	1,56	1,52	1,49	1,47	1,45	1,43	1,42	1,39	1,38	1,36	1,35	1,34	1,30	1,28	1,26	1,24	1,21
55	1,68	1,66	1,60	1,55	1,52	1,49	1,46	1,44	1,43	1,41	1,39	1,37	1,35	1,34	1,33	1,30	1,27	1,25	1,23	1,20
60	1,68	1,65	1,59	1,55	1,51	1,48	1,46	1,44	1,42	1,41	1,38	1,36	1,35	1,33	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22	1,19
65	1,68	1,65	1,59	1,54	1,51	1,48	1,45	1,43	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,33	1,32	1,28	1,26	1,24	1,21	1,18
70	1,67	1,65	1,59	1,54	1,50	1,47	1,45	1,43	1,41	1,40	1,37	1,35	1,34	1,32	1,31	1,28	1,26	1,23	1,20	1,17
75	1,67	1,64	1,59	1,54	1,50	1,47	1,45	1,43	1,41	1,39	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,27	1,25	1,23	1,20	1,17
80	1,67	1,64	1,58	1,53	1,50	1,47	1,44	1,42	1,41	1,39	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,27	1,25	1,22	1,19	1,16
85	1,67	1,64	1,58	1,53	1,50	1,46	1,44	1,42	1,40	1,39	1,36	1,34	1,33	1,31	1,30	1,27	1,24	1,22	1,19	1,16
90	1,67	1,64	1,58	1,53	1,49	1,46	1,44	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,30	1,26	1,24	1,21	1,18	1,15
95	1,67	1,64	1,58	1,53	1,49	1,46	1,44	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,30	1,26	1,24	1,21	1,18	1,15
100	1,66	1,64	1,58	1,53	1,49	1,46	1,43	1,41	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,30	1,26	1,23	1,21	1,18	1,14
120	1,66	1,63	1,57	1,52	1,48	1,45	1,43	1,41	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,29	1,25	1,23	1,20	1,17	1,13
140	1,66	1,63	1,57	1,52	1,48	1,45	1,42	1,40	1,39	1,37	1,35	1,32	1,31	1,29	1,28	1,24	1,22	1,19	1,16	1,12
160	1,66	1,63	1,56	1,52	1,48	1,45	1,42	1,40	1,38	1,37	1,34	1,32	1,30	1,29	1,28	1,24	1,21	1,19	1,15	1,11
180	1,65	1,62	1,56	1,51	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32	1,30	1,29	1,28	1,24	1,21	1,18	1,15	1,11
200	1,65	1,62	1,56	1,51	1,47	1,44	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32	1,30	1,29	1,27	1,23	1,21	1,18	1,14	1,10
1000	1,64	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,40	1,38	1,36	1,35	1,32	1,30	1,28	1,27	1,26	1,21	1,19	1,16	1,11	1,05

Таблиця 4. Значення F -статистики Фішера з рівнем значимості $1-\alpha=0,9$.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	60	120	1000
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,7	61,1	61,4	61,6	61,7	62,3	62,5	62,8	63,1	63,3
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,43	9,44	9,44	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,20	5,19	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,88	3,86	3,85	3,84	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,25	3,23	3,22	3,21	3,17	3,16	3,14	3,12	3,11
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,88	2,86	2,85	2,84	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,64	2,62	2,61	2,59	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,48	2,45	2,44	2,42	2,38	2,36	2,34	2,32	2,30
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,35	2,33	2,31	2,30	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,26	2,23	2,22	2,20	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,18	2,16	2,14	2,12	2,08	2,05	2,03	2,00	1,98
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,12	2,09	2,08	2,06	2,01	1,99	1,96	1,93	1,91
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,07	2,04	2,02	2,01	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,02	2,00	1,98	1,96	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,95	1,93	1,91	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,93	1,90	1,88	1,86	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,90	1,87	1,85	1,84	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,88	1,85	1,83	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,86	1,83	1,81	1,79	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,83	1,80	1,78	1,76	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,81	1,78	1,76	1,74	1,69	1,66	1,62	1,59	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,80	1,77	1,75	1,73	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,79	1,76	1,74	1,72	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,77	1,75	1,72	1,71	1,65	1,61	1,58	1,54	1,51
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,76	1,74	1,71	1,70	1,64	1,60	1,57	1,53	1,50
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,75	1,73	1,70	1,69	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,68	1,62	1,58	1,55	1,51	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,74	1,71	1,69	1,67	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46
31	2,87	2,48	2,27	2,14	2,04	1,97	1,92	1,88	1,84	1,81	1,77	1,73	1,70	1,68	1,66	1,60	1,56	1,53	1,49	1,45
32	2,87	2,48	2,26	2,13	2,04	1,97	1,91	1,87	1,83	1,81	1,76	1,72	1,69	1,67	1,65	1,59	1,56	1,52	1,48	1,44

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	60	120	1000
33	2,86	2,47	2,26	2,12	2,03	1,96	1,91	1,86	1,83	1,80	1,75	1,72	1,69	1,66	1,64	1,58	1,55	1,51	1,47	1,43
34	2,86	2,47	2,25	2,12	2,02	1,96	1,90	1,86	1,82	1,79	1,75	1,71	1,68	1,66	1,64	1,58	1,54	1,50	1,46	1,43
35	2,85	2,46	2,25	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,82	1,79	1,74	1,70	1,67	1,65	1,63	1,57	1,53	1,50	1,46	1,42
36	2,85	2,46	2,24	2,11	2,01	1,94	1,89	1,85	1,81	1,78	1,73	1,70	1,67	1,65	1,63	1,56	1,53	1,49	1,45	1,41
37	2,85	2,45	2,24	2,10	2,01	1,94	1,89	1,84	1,81	1,78	1,73	1,69	1,66	1,64	1,62	1,56	1,52	1,48	1,44	1,40
38	2,84	2,45	2,23	2,10	2,01	1,94	1,88	1,84	1,80	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,61	1,55	1,52	1,48	1,44	1,40
39	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,88	1,83	1,80	1,77	1,72	1,68	1,65	1,63	1,61	1,55	1,51	1,47	1,43	1,39
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,68	1,65	1,62	1,61	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38
45	2,82	2,42	2,21	2,07	1,98	1,91	1,85	1,81	1,77	1,74	1,70	1,66	1,63	1,60	1,58	1,52	1,48	1,44	1,40	1,36
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73	1,68	1,64	1,61	1,59	1,57	1,50	1,46	1,42	1,38	1,33
55	2,80	2,40	2,19	2,05	1,95	1,88	1,83	1,78	1,75	1,72	1,67	1,63	1,60	1,58	1,55	1,49	1,45	1,41	1,36	1,31
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,62	1,59	1,56	1,54	1,48	1,44	1,40	1,35	1,30
65	2,78	2,39	2,17	2,03	1,94	1,87	1,81	1,77	1,73	1,70	1,65	1,61	1,58	1,55	1,53	1,47	1,43	1,38	1,34	1,29
70	2,78	2,38	2,16	2,03	1,93	1,86	1,80	1,76	1,72	1,69	1,64	1,60	1,57	1,55	1,53	1,46	1,42	1,37	1,32	1,27
75	2,77	2,37	2,16	2,02	1,93	1,85	1,80	1,75	1,72	1,69	1,63	1,60	1,57	1,54	1,52	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
80	2,77	2,37	2,15	2,02	1,92	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,63	1,59	1,56	1,53	1,51	1,44	1,40	1,36	1,31	1,25
85	2,77	2,37	2,15	2,01	1,92	1,84	1,79	1,74	1,71	1,67	1,62	1,59	1,55	1,53	1,51	1,44	1,40	1,35	1,30	1,24
90	2,76	2,36	2,15	2,01	1,91	1,84	1,78	1,74	1,70	1,67	1,62	1,58	1,55	1,52	1,50	1,43	1,39	1,35	1,29	1,24
95	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,84	1,78	1,74	1,70	1,67	1,62	1,58	1,55	1,52	1,50	1,43	1,39	1,34	1,29	1,23
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,61	1,57	1,54	1,52	1,49	1,42	1,38	1,34	1,28	1,22
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,56	1,53	1,50	1,48	1,41	1,37	1,32	1,26	1,20
140	2,74	2,34	2,12	1,99	1,89	1,82	1,76	1,71	1,68	1,64	1,59	1,55	1,52	1,50	1,47	1,40	1,36	1,31	1,25	1,19
160	2,74	2,34	2,12	1,98	1,88	1,81	1,75	1,71	1,67	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47	1,39	1,35	1,30	1,24	1,17
180	2,73	2,33	2,11	1,98	1,88	1,81	1,75	1,70	1,67	1,63	1,58	1,54	1,51	1,48	1,46	1,39	1,34	1,29	1,23	1,16
200	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,58	1,54	1,51	1,48	1,46	1,38	1,34	1,29	1,23	1,16
1000	2,71	2,31	2,09	1,95	1,85	1,78	1,72	1,68	1,64	1,61	1,55	1,51	1,48	1,45	1,43	1,35	1,30	1,25	1,18	1,08

Таблиця 5. Значення F -статистики Фішера з рівнем значимості $1-\alpha = 0,95$.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	60	120	1000
1	161	199	215	224	230	233	236	238	240	241	243	245	246	247	248	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65	2,57	2,53	2,49	2,45	2,41
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42	2,38	2,35	2,33	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,33	2,30	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,33	2,29	2,26	2,23	2,15	2,10	2,06	2,01	1,97
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,25	2,22	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26	2,21	2,18	2,16	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22	2,18	2,15	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,85
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,16	2,12	2,10	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17	2,13	2,10	2,07	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,13	2,09	2,05	2,03	1,94	1,89	1,84	1,79	1,74
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,92	1,87	1,82	1,77	1,72
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09	2,05	2,02	1,99	1,90	1,85	1,80	1,75	1,70
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,97	1,88	1,84	1,79	1,73	1,68
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96	1,87	1,82	1,77	1,71	1,66
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,85	1,81	1,75	1,70	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	1,99	1,96	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,63
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,08	2,03	1,98	1,95	1,92	1,83	1,78	1,73	1,67	1,62
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,07	2,01	1,97	1,94	1,91	1,82	1,77	1,71	1,66	1,60

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	60	120	1000
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,06	2,00	1,96	1,93	1,90	1,81	1,76	1,70	1,64	1,59
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,80	1,75	1,69	1,63	1,58
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,04	1,99	1,94	1,91	1,88	1,79	1,74	1,68	1,62	1,57
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,03	1,98	1,93	1,90	1,87	1,78	1,73	1,67	1,61	1,56
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,77	1,72	1,66	1,60	1,55
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,02	1,96	1,92	1,88	1,85	1,76	1,71	1,65	1,59	1,54
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,01	1,95	1,91	1,88	1,85	1,75	1,70	1,65	1,58	1,53
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,95	1,90	1,87	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,52
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	1,97	1,92	1,87	1,84	1,81	1,71	1,66	1,60	1,54	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78	1,69	1,63	1,58	1,51	1,45
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,93	1,88	1,83	1,79	1,76	1,67	1,61	1,55	1,49	1,42
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,82	1,78	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,40
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,90	1,85	1,80	1,76	1,73	1,63	1,58	1,52	1,45	1,38
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,89	1,84	1,79	1,75	1,72	1,62	1,57	1,50	1,44	1,36
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,88	1,83	1,78	1,74	1,71	1,61	1,55	1,49	1,42	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,82	1,77	1,73	1,70	1,60	1,54	1,48	1,41	1,34
85	3,95	3,10	2,71	2,48	2,32	2,21	2,12	2,05	1,99	1,94	1,87	1,81	1,76	1,73	1,70	1,59	1,54	1,47	1,40	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,86	1,80	1,76	1,72	1,69	1,59	1,53	1,46	1,39	1,31
95	3,94	3,09	2,70	2,47	2,31	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,86	1,80	1,75	1,71	1,68	1,58	1,52	1,46	1,38	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,57	1,52	1,45	1,38	1,30
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,55	1,50	1,43	1,35	1,27
140	3,91	3,06	2,67	2,44	2,28	2,16	2,08	2,01	1,95	1,90	1,82	1,76	1,72	1,68	1,65	1,54	1,48	1,41	1,33	1,25
160	3,90	3,05	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,81	1,75	1,71	1,67	1,64	1,53	1,47	1,40	1,32	1,23
180	3,89	3,05	2,65	2,42	2,26	2,15	2,06	1,99	1,93	1,88	1,81	1,75	1,70	1,66	1,63	1,52	1,46	1,39	1,31	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,80	1,74	1,69	1,66	1,62	1,52	1,46	1,39	1,30	1,21
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,76	1,70	1,65	1,61	1,58	1,47	1,41	1,33	1,24	1,11

Таблиця 6. Значення F-статистики Фішера з рівнем значимості $1-\alpha=0,99$.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	120	1000
1	4052	4999	5403	5624	5763	5858	5928	5980	6022	6055	6106	6143	6170	6191	6208	6260	6339	6362
2	98,5	99,0	99,16	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,46	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	26,9	26,8	26,8	26,7	26,5	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,69	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,6	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	13,8	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,06	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55	9,38	9,11	9,03
6	13,8	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40	7,23	6,97	6,89
7	12,3	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,36	6,28	6,21	6,16	5,99	5,74	5,66
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,56	5,48	5,41	5,36	5,20	4,95	4,87
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	5,01	4,92	4,86	4,81	4,65	4,40	4,32
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41	4,25	4,00	3,92
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10	3,94	3,69	3,61
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,05	3,97	3,91	3,86	3,70	3,45	3,37
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66	3,51	3,25	3,18
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51	3,35	3,09	3,02
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37	3,21	2,96	2,88
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26	3,10	2,84	2,76
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16	3,00	2,75	2,66
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08	2,92	2,66	2,58
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00	2,84	2,58	2,50
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94	2,78	2,52	2,43
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,07	2,99	2,93	2,88	2,72	2,46	2,37
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83	2,67	2,40	2,32
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,97	2,89	2,83	2,78	2,62	2,35	2,27
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74	2,58	2,31	2,22
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,89	2,81	2,75	2,70	2,54	2,27	2,18
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,86	2,78	2,72	2,66	2,50	2,23	2,14
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,82	2,75	2,68	2,63	2,47	2,20	2,11
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,79	2,72	2,65	2,60	2,44	2,17	2,08
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,77	2,69	2,63	2,57	2,41	2,14	2,05
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,74	2,66	2,60	2,55	2,39	2,11	2,02
31	7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,82	2,72	2,64	2,58	2,52	2,36	2,09	1,99
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,80	2,70	2,62	2,55	2,50	2,34	2,06	1,97

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	120	1000
33	7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,78	2,68	2,60	2,53	2,48	2,32	2,04	1,95
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,76	2,66	2,58	2,51	2,46	2,30	2,02	1,92
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,74	2,64	2,56	2,50	2,44	2,28	2,00	1,90
36	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,72	2,62	2,54	2,48	2,43	2,26	1,98	1,89
37	7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,71	2,61	2,53	2,46	2,41	2,25	1,96	1,87
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,69	2,59	2,51	2,45	2,40	2,23	1,95	1,85
39	7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,68	2,58	2,50	2,43	2,38	2,22	1,93	1,83
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,56	2,48	2,42	2,37	2,20	1,92	1,82
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,61	2,51	2,43	2,36	2,31	2,14	1,85	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,56	2,46	2,38	2,32	2,27	2,10	1,80	1,70
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,53	2,42	2,34	2,28	2,23	2,06	1,76	1,65
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,39	2,31	2,25	2,20	2,03	1,73	1,62
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,80	2,69	2,61	2,47	2,37	2,29	2,23	2,17	2,00	1,70	1,59
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,45	2,35	2,27	2,20	2,15	1,98	1,67	1,56
75	6,99	4,90	4,05	3,58	3,27	3,05	2,89	2,76	2,65	2,57	2,43	2,33	2,25	2,18	2,13	1,96	1,65	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,42	2,31	2,23	2,17	2,12	1,94	1,63	1,51
85	6,94	4,86	4,02	3,55	3,24	3,02	2,86	2,73	2,62	2,54	2,40	2,30	2,22	2,15	2,10	1,93	1,61	1,49
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,39	2,29	2,21	2,14	2,09	1,92	1,60	1,48
95	6,91	4,84	3,99	3,52	3,22	3,00	2,83	2,70	2,60	2,51	2,38	2,28	2,20	2,13	2,08	1,90	1,58	1,46
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,37	2,27	2,19	2,12	2,07	1,89	1,57	1,45
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,23	2,15	2,09	2,03	1,86	1,53	1,40
140	6,82	4,76	3,92	3,46	3,15	2,93	2,77	2,64	2,54	2,45	2,31	2,21	2,13	2,07	2,01	1,84	1,50	1,37
160	6,80	4,74	3,91	3,44	3,13	2,92	2,75	2,62	2,52	2,43	2,30	2,20	2,11	2,05	1,99	1,82	1,48	1,34
180	6,78	4,73	3,89	3,43	3,12	2,90	2,74	2,61	2,51	2,42	2,28	2,18	2,10	2,04	1,98	1,81	1,47	1,32
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,27	2,17	2,09	2,03	1,97	1,79	1,45	1,30
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,20	2,10	2,02	1,95	1,90	1,72	1,35	1,16

Таблиця 7. Статистика Дарбіна-Уотсона, $\alpha = 0,01$.

	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,10	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,80	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,60	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,91	1,28	0,83	1,40	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,40	0,77	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,80	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,05	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,20	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65

Таблиця 8. Статистика Дарбіна-Уотсона, $\alpha = 0,05$.

	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Транслітерація прізвищ відомих економетристів

Англійський правопис	**Українська транслітерація**
Chow	Чоу
Cochrane	Кочрейн
Durbin	Дарбін
Fisher	Фішер
Glejzer	Глейзер
Goldfeld	Голдфелд
Hildreth	Хілдрет
Lu	Лу
Student	Стьюдент
Orcutt	Оркатт
Quandt	Квондт
Watson	Уотсон
White	Уайт

Література

1. Доугерти К. Введение в економетрику: Пер. С англ. – М.: ИНФРА-М, 2001. – XIV, 402 с. – (Серия «Университетский учебник»).
2. К.Холден, Д.А.Піл, Дж. Томпсон „Економічне прогнозування: вступ”, К. 1999.
3. Корольов О.А. Економетрія: Навч. посібник. – К.: КНТЕУ, 2000. – 660 с.
4. Лук'яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах: Навч. посібник. – К.: Літера ЛТД, 2002. – 352 с.
5. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: "Знання", КОО, 1998. – 493 с.
6. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Практикум з використанням комп'ютера. – К.: "Знання", КОО, 1998. – 217 с.
7. Магнус Я.Р. и др. Эконометрика: начальный курс. – М., 2000, 400 с.
8. Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Економетрія: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц.. – К., 2001, 192 с.
9. Практикум по эконометрике // Под ред. И.И.Елисеевой. – М., 2003, 192 с.
10. Черваньов Д. М., Комашко О. В. Економетрика: Курс лекцій. – К.: РВУ КІЕМБС, 1998.
11. Черняк О.І., Ставицький А.В. Динамічна економетрика. – К.: КВІЦ, 2000. – 120 с.
12. Box G. And Jenkins G. (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco, Holden-Day.
13. Greene W.H. (1997) Econometric Analysis, 3rd edition. Prentice-Hall.
14. Hamilton J.D. (1994) Time Series Analysis. Princeton University Press.