Семінар 4. Перевірка статистичних гіпотез

В цьому розділі ми навчимося перевіряти наступні гіпотези:

1. Про адекватність моделі.

2a. Про значення коефіцієнта моделі.

2b. Про значущість коефіцієнта моделі

3. Про стійкість моделі

4. Про лінійні обмеження моделі.

5. Про нормальність залишків

Нехай ми маємо наступне регресійне рівняння[1]:

Equation: EQ01 Workfile: CHICKEN::Chicken\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 08/27/13 Time: 13:36
Sample: 1 33
Included observations: 33

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	31.40959	1.376227	22.82297	0.0000
YD	0.001839	0.000405	4.538711	0.0001
PB	0.247457	0.070428	3.513599	0.0015
PC	-0.819809	0.089305	-9.179902	0.0000

R-squared	0.963632	Mean dependent var	35.87879
Adjusted R-squared	0.959870	S.D. dependent var	9.927763
S.E. of regression	1.988782	Akaike info criterion	4.326134
Sum squared resid	114.7024	Schwarz criterion	4.507529
Log likelihood	-67.38122	Hannan-Quinn criter.	4.387168
F-statistic	256.1347	Durbin-Watson stat	0.753680
Prob(F-statistic)	0.000000		

Гіпотеза про адекватність моделі

Для перевірки моделі на адекватність необхідно порівняти практично знайдене значення F-статистики з теоретичним значенням. Адекватність моделі означає, що відхиляється гіпотеза про те, що всі коефіцієнти моделі одночасно дорівнюють 0. В даному випадку, практичне значення дорівнює 256,1347.

[1] Файл chicken.wf1

Теоретичне значення можна знайти з таблиця розподілу Фішера з 3 та 29 ступенями свободи та заданим рівнем значущості α=0,05.

Оскільки *Prob. (F-statistic)=0.0000,* що менше ніж 0,05 (рівень значущості), а тим більше 0,01, тоді можна зробити висновок про адекватність моделі при рівні значущості 0,05 та 0,01.

Гіпотеза про значення коефіцієнта моделі

Для перевірки гіпотези про значення *m* коефіцієнта b_i моделі (H_0: $\beta_1 = m$) необхідно порівняти практично знайдене значення t-статистики розподілу Стьюдента з теоретичним значенням (зауважте, що у комп'ютерних програмах підраховується 1-α/2 квантиль). Практичне значення підраховується за формулою:

$$t_{pr} = \frac{\left|\hat{\beta}_i - m\right|}{s.e.(\hat{\beta}_i)},$$

де β_i - коефіцієнт, значення якого перевіряється;

i - номер коефіцієнта; i= 0,1,...;

m - значення для перевірки;

$s.e.(\hat{\beta}_i)$ - стандартне відхилення для даного коефіцієнта.

Далі за вибраним рівнем значущості α в таблиці розподілу Стьюдента з n-k ступенями свободи знаходимо критичне значення $t_{кр}$. Якщо $|t_{pr}| < t_{кр}$, то гіпотеза H_0 приймається. Якщо $|t_{pr}| \geq t_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Наприклад, перевіримо гіпотезу про значення коефіцієнта при змінній РВ 2 за рівнем значущості 0,95. Для цього розрахуємо практичне значення t-статистики:

$$t_{pr} = \frac{\left|0{,}247457 - 2\right|}{0{,}070428} = 23{,}5937.$$

Теоретичне значення t-статистики дорівнює 2,045. Оскільки практичне значення t-статистики перевищує теоретичне, можна зробити висновок про відхилення нульової гіпотези про рівність коефіцієнта при змінній РВ 2.

Гіпотеза про значущість коефіцієнта моделі

В програмному пакеті Eviews для перевірки значущості змінної (рівності змінної нулеві) необхідно порівняти значення **p-value** (в таблиці результатів – це стовпчик **Prob**) з рівнем значущості.

Наприклад, для даної моделі:

- *Prob. (YD)= 0.0001,* що менше ніж 0,01 та 0,05 (рівень значущості), тоді можна зробити висновок про значущість змінної *YD* при будь-якому рівні значущості.
- *Prob. (PB)= 0.0015,* що менше ніж 0,01 та 0,05 (рівень значущості), тоді можна зробити висновок про значущість змінної *PB* при рівні значущості 0,05 та 0,01.
- *Prob. (PC)= 0.0000,* що менше ніж 0,01 та 0,05 (рівень значущості), тоді можна зробити висновок про значущість змінної *PC* при будь-якому рівні значущості.

Перевірка гіпотези про стійкість моделі

Припустимо, що ми хочемо побудувати модель деякої економічної системи за даними, що є часовими рядами. Нехай, наприклад, потрібно оцінити макроекономічну виробничу функцію для деякої країни за щорічними даними, причому на протязі періоду, який досліджується, відбулась економічна реформа. Природньо постає питання: чи маємо ми право користуватись єдиною моделлю на протязі всього періоду часу. Відповідь на подібні питання можна одержати за допомогою дослідження моделі на стійкість.

Критерій дисперсійного аналізу (критерій переломної точки Чоу)

Розглянемо модель

$$y = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_j + \varepsilon \tag{1}$$

У нашому розпорядженні є n спостережень, які розбито на дві групи з n_1 та n_2 спостережень відповідно ($n = n_1 + n_2$). Гіпотеза про стійкість моделі полягає у тому, що параметри регресії однакові для обох груп спостережень. Для перевірки гіпотези потрібно оцінити модель (1) тричі: за всіма спостереженнями і кожною групою окремо. Введемо такі позначення:

RSS – сума квадратів залишків у моделі, яка оцінена за всіма n спостереженнями,

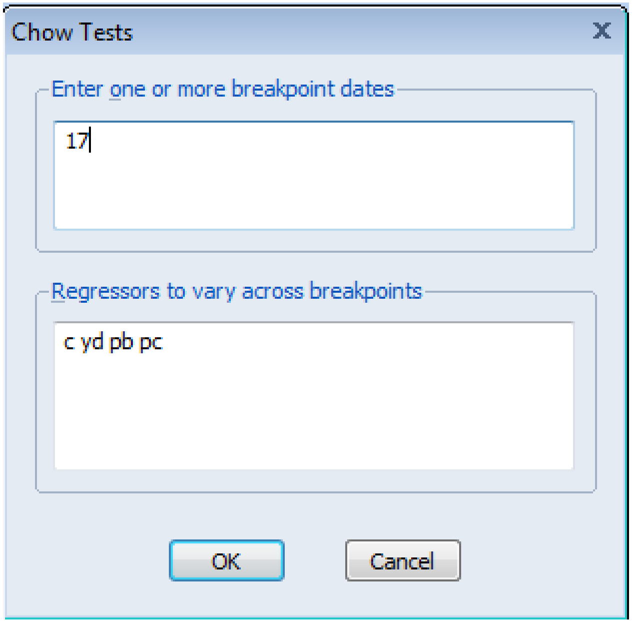
RSS_1 – сума квадратів залишків у моделі, яка оцінена за першими n_1 спостереженнями

RSS_2 – сума квадратів залишків у моделі, яка оцінена за останніми n_2 спостереженнями.

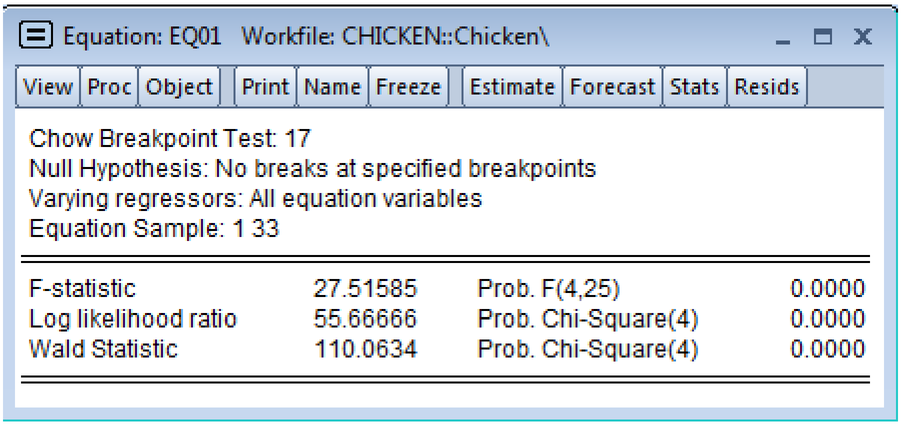
Якщо гіпотеза про стійкість моделі вірна, то

$$F = \frac{\dfrac{RSS - (RSS_1 + RSS_2)}{k}}{\dfrac{RSS_1 + RSS_2}{n - 2k}} \sim F_{k,n-2k}\,. \qquad (2)$$

В Eviews для перевірки гіпотези про стійкість моделі необхідно (знаходячись у вікні результатів оцінки моделі) обрати в меню наступні команди ***View→Stability Tests→Chow Breakpoint test*** та ввести дату або номер спостереження, під час якої відбулися певні зміни (переломні точки):



Вікно результатів матиме наступний вигляд:



Оскільки *Prob.* < 0.05 відхиляється гіпотеза про відсутність структурних змін, що відбулися в 17-му спостереженні. Таким чином, модель є нестійкою.

Прогностичний критерій Чоу

Застосовується у випадках, коли одна з двох груп нараховує невелику кількість спостережень, недостатню для знаходження оцінок. Нехай, для визначеності, $n_1 > n_2$. Для перевірки гіпотези потрібно оцінити модель (1) двічі: за всіма спостереженнями і за більшою групою. Позначимо :

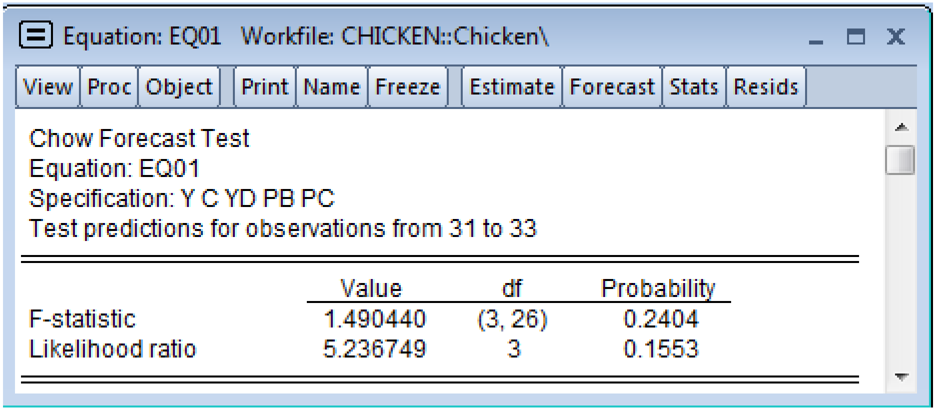
RSS – сума квадратів залишків у моделі, яка оцінена за всіма n спостереженнями,

RSS_1 – сума квадратів залишків у моделі, яка оцінена за більшою групою з n_1 спостереження.

Якщо гіпотеза про стійкість моделі вірна, то

$$F = \frac{\dfrac{RSS - RSS_1}{n_2}}{\dfrac{RSS_1}{n_1 - k}} \sim F_{n_2, n_1 - k}. \tag{3}$$

Для проведення цього тесту в Eviews необхідно (знаходячись у вікні результатів оцінки моделі) обрати в меню наступні команди ***View→Stability Tests→Chow Forecast test*** та ввести дату або номер спостереження, під час якої відбулися певні зміни (переломні точки) - в даному випадку 31:



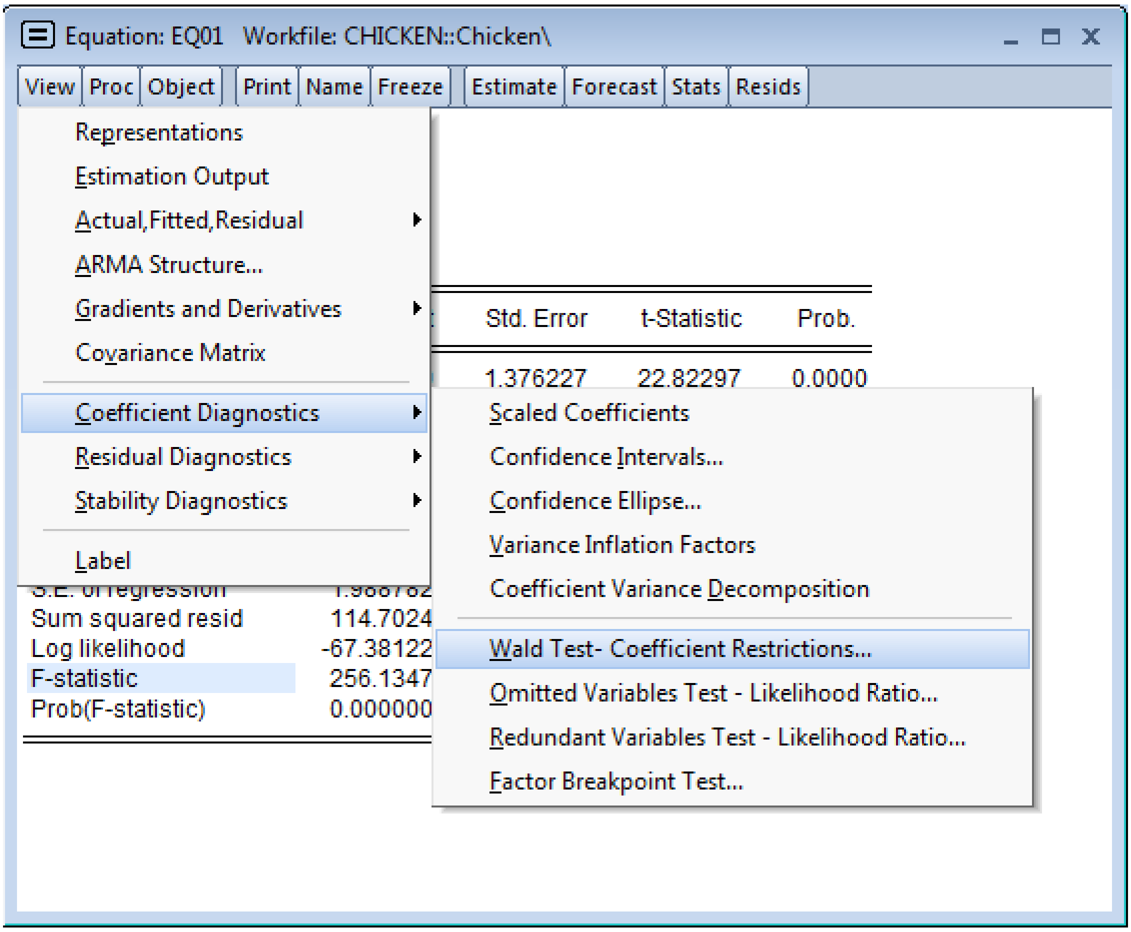
Оскільки *Prob. > 0.05* відхиляється альтернативна гіпотеза про структурні зміни, що відбулися в 31-ому спостереженні. Таким чином, модель є стійкою.

Гіпотеза про лінійні обмеження на коефіцієнти моделі

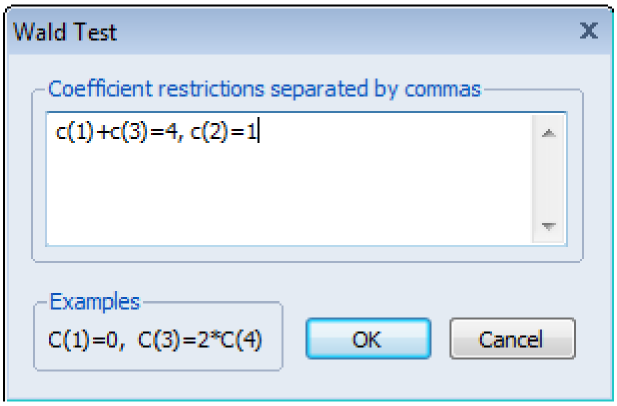
Нехай нам необхідно перевірити наступні гіпотези:

$$c(1) + c(3) = 4 \text{ та } c(2) = 1$$

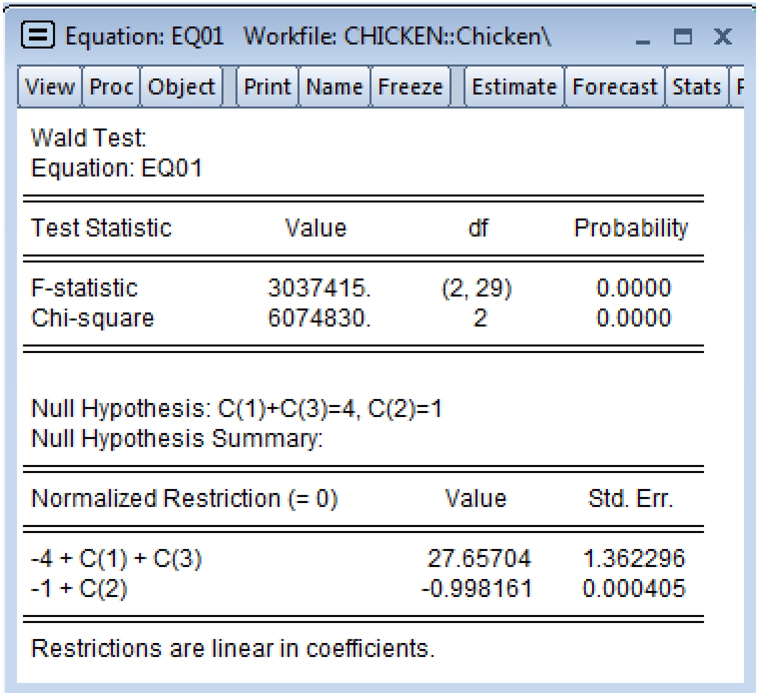
Для цього необхідно (знаходячись у вікні результатів оцінки моделі) обрати в меню наступні команди **View→Coefficient Tests→Wald-Coefficient Restrictions… :**



У діалоговому вікні вказується вид гіпотези (зверніть увагу, що нумерація коефіцієнтів починається з 1, тому c(1) відповідає β_0 , c(1) – β_1 і т.д.):



Результати перевірки свідчать про те, що нульова гіпотеза має бути відхиленою, оскільки значення **Probability** менше за 0,05.



Wald Test:
Equation: EQ01

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	3037415.	(2, 29)	0.0000
Chi-square	6074830.	2	0.0000

Null Hypothesis: C(1)+C(3)=4, C(2)=1
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
-4 + C(1) + C(3)	27.65704	1.362296
-1 + C(2)	-0.998161	0.000405

Restrictions are linear in coefficients.

Нагадаємо, що значенням F-статистики можна користуватися лише за припущення про нормальний розподіл збурень регресії, в іншому випадку необхідно використовувати значення χ^2 .

В загальному випадку для перевірки подібної гіпотези необхідно:

1. Виразити всі змінні системи, яка подана у гіпотезі, через найменшу кількість інших змінних,
2. Підставити всі знайдені тотожності до регресії,
3. Перенести всі відомі в ліву частину, невідомі - залишити праворуч,
4. Побудувати нову регресію,
5. Знайти практичне значення статистики Фішера,
6. Порівняти його з теоретичним і зробити висновок.

5. Перевірка залишків на нормальність

Для перевірки відповідності залишків моделі нормальному розподілу застосовується спеціальний тест Харке-Бера (англ. Jarque-Bera test). Нагадаємо, що нормальність збурень регресії – це одна з основних вимог теореми Гауса-Маркова. Якщо збурення не будуть нормально розподілені, то оцінки МНК не будуть мати найкращих статистичних властивостей. Більш того, у випадку, коли збурення не мають нормального розподілу, доводиться суттєво змінювати стандартні статистичні процедури. Зокрема, не можна користуватися тестами Стьюдента та Фішера, які побудовані як раз на припущенні про нормальність збурень.

Для тесту використовуються величини третього моменту (асиметрія) та четвертого моменту (ексцес) з моментами нормального розподілу, у якого вони відповідно дорівнюють 0 та 3. Такі величини обрані на основі аналізу великих вибірок, а тому цей тест є асимптотичним, тобто його найкращі якості проявляються, якщо розмір вибірки є досить великим. В той же час цим тестом користуються і у випадку малих вибірок, але в цьому випадку зауважують, що його точність суттєво зменшується.

Як відомо, стандартне відхилення ряду знаходиться за формулою:

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\bar{y}\right)^2}{n-1}}\ ,$$

де n - кількість елементів у ряді,

$\bar{y}$ – середнє значення ряду.

Оскільки на практиці похибки невідомі, то використовують зміщену оцінку стандартного відхилення:

$$\hat{\sigma} = s\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Тоді коефіцієнт асиметрії (третій момент) розподілу можна розрахувати за формулою:

$$S = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t - \overline{y}}{\hat{\sigma}}\right)^3$$

Коефіцієнт ексцесу можна знайти за формулою:

$$K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t - \overline{y}}{\hat{\sigma}}\right)^4$$

У тесті Харке-Бера перевіряється гіпотеза:

$$H_0 : S = 0, K = 3$$

Альтернативною гіпотезою є

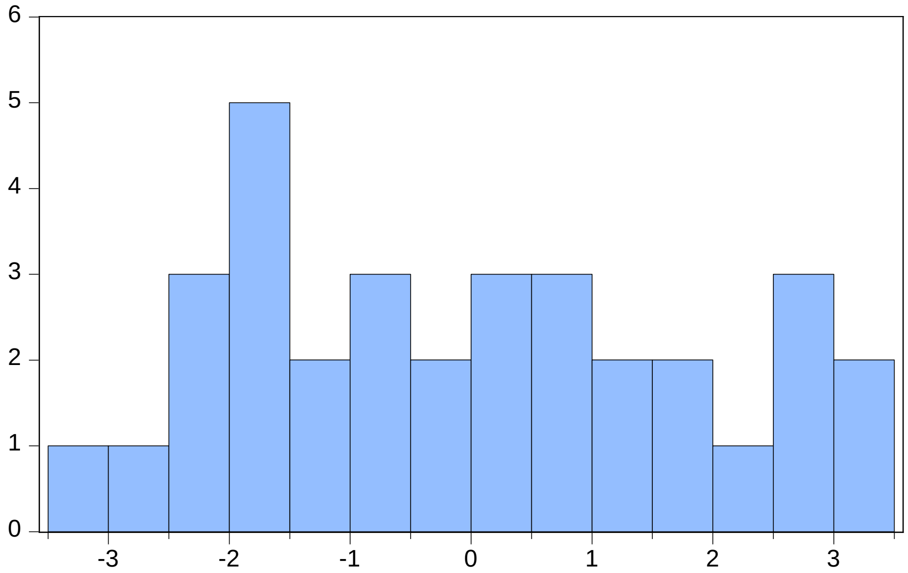
$$H_1 : S \neq 0, K \neq 3$$

Якщо приймається гіпотеза H_0 , то це означає, що ряд даних нормально розподілений. Практичне значення критерію розраховується за формулою:

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right)$$

Цю величину слід порівняти з розподілом χ^2 з 2 степенями свободи для необхідного рівня надійності. Якщо практичне значення JB не перевищую табличне значення χ^2, то приймається гіпотеза про нормальність розподілу.

Для перевірки залишків моделі на наявність нормального розподілу сілд у вікні моделі вибрати меню **View-Residual Diagnostics-Histogram - Normality Test**.



Series: Residuals	
Sample 1 33	
Observations 33	
Mean	-1.52e-15
Median	-0.214373
Maximum	3.359524
Minimum	-3.217723
Std. Dev.	1.893264
Skewness	0.249339
Kurtosis	1.910404
Jarque-Bera	1.974362
Probability	0.372626

У результаті отримуємо гістограму розподілу залишків, а також розрахункове значення статистки Харке-Бера. У нашому прикладі воно дорівнює JB=1,97. Табличне значення χ^2 з 2 степенями свободи та рівнем надійності 0,95 дорівнює 5,99, таким чином $JB < \chi^2(2)$, а значить гіпотеза H_0 приймається, тобто залишки мають нормальний розподіл.

Аналогчну відповідь можна отримати, порівнявши величину Probability=0,37 з рівнем похибки (0,05). Оскільки Probability>0,05, то гіпотеза H_0 приймається, тобто залишки мають нормальний розподіл.

Самостійна робота

1. На основі даних робочого файлу macromod.wf1 побудувати 4 регресійних рівняння та виконати перевірки гіпотез про адекватність моделей та про значущість коефіцієнтів.

2. Завантаживши вже знайомий вам робочий файл expend.wf1, розгляньте знову графік залежності витрат на продукти харчування *FOOD* від індексу відносних цін на продукти харчування *PRELFOOD*. Наскільки обґрунтовано говорити про наявність структурного зрушення?

Оцініть рівняння регресії витрат на продукти харчування *FOOD* від індексу відносних цін на продукти харчування *PRELFOOD*. Перевірте гіпотезу про наявність структурного зрушення за допомогою тесту Чоу.

3. Використовуючи дані файлу expend.wf1, розрахуйте величину податків *TAX* як різницю сукупного особистого доходу *PI* і особистого доходу у розпорядженні *DPI*. Побудуйте регресію витрат на продукти харчування по сукупному особистому доході, податкам і відносним цінам на продовольство. Порівняйте коефіцієнти при сукупному особистому доході і податках. Яку гіпотезу про наявність лінійного обмеження можна сформулювати на основі цього порівняння? Перевірте цю гіпотезу за допомогою критерію Вальда.

4. За допомогою комп'ютера розв'язати задачі: **2.20, 2.27.**

5. Розв'язати задачі: **2.6, 2.7.**