к.е.н. Ставицький, асистент кафедри економічної кібернетики Київського університету імені Тараса Шевченка
Ніколайчук С.А., економіст

Застосування GARCH-моделей для прогнозування волатильності ПФТС-індексу

Основна складність при аналізі та прогнозуванні цін фінансових активів пов'язана з оцінкою ризику. Використання волатильності, що характеризує розмір коливань ціни чи доходності, для оцінки ризику відкриття позицій – популярна ідея серед учасників фінансових ринків. Чимало концепцій спираються на параметр ступеня мінливості ринку. Наприклад, моделі ціноутворення встановлюють співвідношення між курсами цінних паперів і волатильністю: сподівана доходність акцій залежать від коваріації між доходностями акції і ринкового портфеля (відповідно до моделі CAPM, розробленій Шарпом [1]), ціни опціону залежать від дисперсії доходності базового активу (відповідно до формули Блека-Шоулза [2]) тощо. На жаль, в літературі рідко розглядається питання про те, яким чином виміряти цю волатильність. У цій роботі проаналізовано різні підходи до оцінки дисперсії чи стандартного відхилення, що звичайно використовуються як міра ризику. Особлива увага надана GARCH-методам, за розробку яких Роберт Інгл в 2003 році розділив Нобелівську премію з ще одним дослідником, що займається аналізом часових рядів в економіці – Клайвом Грейнджером. Для прикладу практичного застосування розглянутих концепцій використовуються значення індексу українського фондового ринку – ПФТС-індексу – в період з 12 січня 1998 року по 18 вересня 2003 року.

Давно помічено, що великі зміни на фінансових ринках мають тенденцію викликати ще більші зміни в будь-якому напрямку, тобто можна прогнозувати великі значення волатильності після великих змін. Ці спостереження на фінансових даних також називають кластеризацією волатильності.

Розглянемо стандартний підхід в оцінці волатильності.

Позначимо через S_t значення ринкової змінної наприкінці дня t. Тоді логарифмічна доходність цієї змінної за день t становитиме:

$$u_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right).$$

Позначимо через σ_t волатильність (стандартне квадратичне відхилення) за день між днем (t-1) і днем t, і оцінювану наприкінці дня t-1. Тоді при стандартному підході незміщена оцінка рівня дисперсії за день $(\sigma_t)^2$, використовуючи останні m спостережень змінної u_t:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{t-i} - \bar{u})^2 \text{, де } \bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{t-i} .$$

При цьому часто використовуються різні спрощення:

- замість логарифмічної доходності використовується капіталізована: $u_t = \dfrac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$;

- припускається, що середнє значення u_t дорівнює $\bar{u} = 0$ (сподівана зміна за день є незначною в порівнянні зі стандартним відхиленням);

- заміна m-1 на m дозволяє перейти від незміщеної оцінки дисперсії до оцінки методом максимальної правдоподібності (ММП), що є стандартним оціночним методом у моделях волатильності.

Врахування цих властивостей дає:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{t-i}^2 .$$

При стандартному підході волатильність вважається незмінною, але як неважко переконатися на історичних даних – це досить хибне припущення для фінансових ринків. Для цього розглянемо значення функції автокореляції доходності і квадрата доходності ПФТС-індексу (рис.1), які переконливо свідчать про непостійність волатильності.

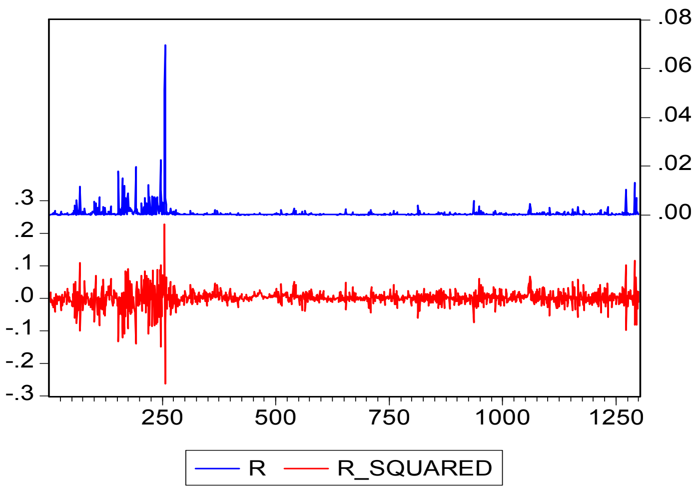

Рис. 1. Щоденні дані доходності і квадрата доходності ПФТС-індексу

Ринку властива невизначеність, вивчення якої набуло систематичного характеру лише з появою моделей авторегресії з гетероскедастичністю (AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic, ARCH). Головна відмінність ARCH моделей від стандартних підходів полягає в тому, що прогнозована волатильність (дисперсія) не є константою, а залежить від минулих станів процесу і розвивається в часу.

Ця модель була розроблена в спрощеній формі Інглом [3] і пізніше узагальнена Боллерслевом [4]. Ці моделі знайшли успішне застосування в моделюванні зміни дисперсії (волатильності) змінних часових рядів, особливо в сфері фінансових інвестицій.

Основна ідея цих методів полягає в тому, що прогнозуючи поточний рівень волатильності, природно надавати більш сильну вагу останнім значенням, тому замість задання рівних важелів спостереженням можна встановити:

$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{t-i}^{\ 2}$, де $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ і $\lambda_i < \lambda_j$ для i > j.

Тоді ARCH(m) визначається при довгостроковому рівню дисперсії V наступним чином:

$\sigma_t^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{m} a_i u_{t-i}^{\ 2}$, де $\gamma + \sum_{i=1}^{m} a_i = 1$, або $\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^{m} a_i u_{t-i}^{\ 2}$.

Узагальнюючи, в GARCH(1,1)-моделі (Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroskedasticity) також встановлюється визначена вага для довгострокового середнього рівня дисперсії:

$\sigma_t^2 = \gamma V + \alpha\sigma_{t-1}^2 + \beta u_{t-1}^2$, причому γ + α + β =1.

Замінюючи w = γV, визначаємо GARCH(1,1)-модель як:

$\sigma_t^2 = w + \alpha\sigma_{t-1}^2 + \beta u_{t-1}^2$ і $V = \dfrac{w}{1-\alpha-\beta}$.

Оскільки рівняння виражає залежність дисперсії доходності в теперішній момент часу від значень попередніх періодів (u_{t-1}^2 і σ_{t-1}^2), така дисперсія називається умовною.

Представлене рівняння умовної дисперсії є функцією від трьох факторів:

- середнього w;
- новин про волатильність попереднього періоду, що визначаються як лаг квадрата залишків з рівняння середнього, тобто непрогнозована зміна рівня доходності: u_{t-1}^2 (ARCH-фактор);
- прогнозованого значення умовної дисперсії попереднього періоду: σ_{t-1}^2 (GARCH-фактор).

Оскільки дисперсія повинна бути додатною, очікується, що коефіцієнти регресії w, α і β – завжди додатні, а коефіцієнти α і β менше 1.

Сума коефіцієнтів регресії (α + β) виражає вплив дисперсії змінних попередніх періодів на поточне значення дисперсії. Це значення як правило близьке до 1, що є ознакою зростаючої інертності ефекту шоків на дисперсію доходності фінансових активів, тобто волатильність майже не змінюється, залишаючись на постійному рівні.

Позначання (1,1) в GARCH(1,1)-моделі показує, що σ_t^2 визначається на основі останнього значення u_{t-1}^2 і останньої оцінки рівня дисперсії σ_{t-1}^2. Для загальної GARCH(p,q)-моделі кількість періодів p і q ідентифікується завдяки аналізу автокорреляційної і часткової автокорреляційної функцій квадратів залишків.

Принциповий недолік GARCH-моделі – неможливість її використання для моделювання доволі поширеного ассиметричного ефекту, коли дисперсія систематично змінюється не в однаковій мірі в залежності від гарних чи поганих новин на ринку. У випадку моделей випадкового блукання непрогнозовані падіння і злети доходності можуть інтерпретуватися як гарні чи погані новини. Якщо падіння доходності супроводжується зростанням волатильності, більшим ніж при зростанні доходності, можна говорити про "ефект левереджа". Ця ідея проілюстрована на рис. 2.

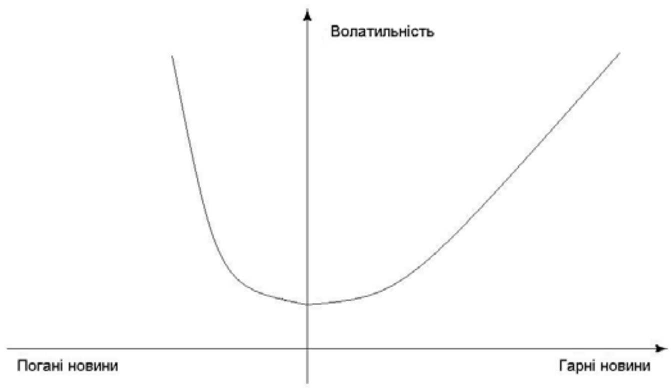

Рис. 2. Левередж ефект – реакція волатильності на гарні і погані новини

Після винайдення асиметричного зв'язку між умовною волатильністю й умовним середнім значенням економетристи сфокусували свою увагу на розробці методів для моделювання цього феномена.

Нельсон [5] запропонував експоненціальну GARCH модель (EGARCH), що базується на логарифмічному вираженні умовної дисперсії досліджуваної змінної:

$\ln\sigma_t^2 = w + \alpha\left|\dfrac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \beta\ln\sigma_{t-1}^2 + \gamma\dfrac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ з асиметричним впливом, якщо γ < 0.

Пізніше, величезна кількість модифікацій була засновано на цій моделі. Одна з них – TARCH метод (Threshold ARCH), що був запропонований Закояном [6]. Практичні дослідження в цій області більш детально були описані Боллерслевом, Чоу і Кронером [7]. Приймаючи до уваги в них знак u_t ми оцінюємо TARCH-модель:

$\sigma_t^2 = w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta\sigma^2{}_{t-1} + \gamma d_{t-1}u^2{}_{t-1}$, де

а) $d_{t-1} = 1$, якщо $u_{t-1} < 0$,

б) $d_{t-1} = 0$, якщо $u_{t-1} > 0$.

Модель заснована на припущенні, що неочікувані зміни мають різні ефекти на умовну дисперсію. Непередбачене зростання являє собою гарні новини ($u_{t-1} > 0$) і впливає на дисперсію моделі через мультиплікатор α. Непередбачене падіння є продуктом поганих новин ($u_{t-1} < 0$) і генерує зростання волатильності через мультиплікатор α + γ.

При дослідженні GARCH(1,1)-моделі необхідно оцінювати два окремих рівняння, одне – для умовного середнього й інше – для умовної дисперсії:

$$y_t = \gamma X_t + u_t\,,$$

$$\sigma_t^2 = w + \alpha\sigma^2{}_{t-1} + \beta u^2{}_{t-1}\,,$$

де *X* являє собою сукупність екзогенних змінних, які пояснюють тимчасову мінливість умовного сподіваного середнього. Введення умовної дисперсії в рівняння середнього приводить до M-GARCH-моделі:

$y_t = \gamma x_t + \delta\,\sigma_t^2 + u_t$.

Економічна інтуїція підказує, що зростання умовного середнього (доходності) може бути пов'язане зі зростанням умовної дисперсії (ризику). M-GARCH є основою для тестування умовної CAPM-моделі.

Дослідимо використання перерахованих вище методів для значень ПФТС-індексу в період з 12 січня 1998 року по 18 вересня 2003 року (1407 спостережень). Перші 1300 значень використаємо для оцінки і статистичної перевірки моделей, а останні 107 – для демонстрації результатів прогнозування "ex post".

Спробуємо змоделювати поведінку доходності ПФТС-індексу за допомогою GARCH(1,1)-процесу (оцінку моделі будемо робити в пакеті EViews):

Таблиця 3. Результати оцінки в EViews

1299 спостережень

Конвергенція досягається після 24 ітерацій

	Коефіцієнт	Станд. похибка	z-статистика	Ймов.
C	0.000902	0.000427	2.111442	0.0347
		Оцінка дисперсії		
C	6.72E-06	1.12E-06	5.992050	0.0000
ARCH(1)	0.144152	0.010645	13.54165	0.0000
GARCH(1)	0.860574	0.006388	134.7158	0.0000
R-квадрат	-0.002271	Стандартне відхилення залежної змінної		0.025631
Скоригований R-квадрат	-0.004593	Критерій Акайке		-5.082423
Сума квадратів похибок	0.854666	Критерій Шварца		-5.066505
Функція правдоподібності	3305.034	Статистика Дурбіна-Ватсона		2.402161

Виділено значимі ARCH і GARCH ефекти.

Кластеризация волатильности відноситься до автокореляції рядів u_i^2. Для адекватної GARCH(1,1)-моделі автокореляція в u_i^2 зникає. Ми можемо протестувати це, розглядаючи структуру автокореляції для u_i^2/σ_i^2. У нашому прикладі, GARCH(1,1)-модель працює дуже добре, залишкова автокореляція – мала у порівнянні з автокореляцією в u_i^2 (табл. 4). Для більшості застосувань GARCH(1,1)-модель виглядає достатньою для поглинання кластерізації волатильності.

Таблиця 4. Результати оцінки в EViews

Лаг	Автокореляція для u_i^2	Автокореляція для u_i^2/σ_i^2
1	0.468	0.051
2	0.111	0.013
3	0.081	0.018
4	0.093	0.014
5	0.081	0.029

Лаг	Автокореляція для u_i^2	Автокореляція для u_i^2/σ_i^2
6	0.047	0.034
7	0.077	0.006
8	0.123	0.021
9	0.225	0.014
10	0.22	0.023

Результати оцінки і статистичної перевірки GARCH(1,1), TGARCH(1,1) і EGARCH(1,1) моделей показані в таблиці 5.

Таблиця 5. Оцінка і статистична перевірка GARCH, TGARCH і EGARCH моделей.

Статистики	GARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	EGARCH(1,1)
μ	0.000902 (2.111442)	0.000455 (1.878743)	0.00091 (2.200351)
w	0.00000672 (5.992050)	0.00000689 (5.980818)	-0.368685 (-13.78207)
α	0.134152 (13.54165)	0.138741 (9.123049)	0.2847 (18.30138)
β	0.860574 (134.7158)	0.014229 (0.669329)	-0.006911 (-0.621499)
γ		0.858562 (132.0545)	0.978393 (310.5523)
Логарифм функції правдоподібності	3305.034	3305.161	3301.136
Інформаційний критерій Акайке	-5.082423	-5.081079	-5.074882
Критерій Шварца	-5.066505	-5.061181	-5.054984

Результати показують, що GARCH-компоненти дисперсії є статистично значимими у всіх трьох моделях.

У випадку регресійного коефіцієнта w для EGARCH-моделі, цей коефіцієнт має від’ємне значення, що може бути причиною від’ємної умовної дисперсії конкретних значень змінних у моделі.

У випадку GARCH-моделі сума коефіцієнтів (α + β) і для TARCH-моделі сума коефіцієнтів (α + γ) близькі до 1, що є наслідком інертності розвитку умовної дисперсії, тобто прогнозоване значення дисперсії майже не змінюється.

Існування "ефекту левереджа" не підтверджується для обох ассиметричних моделей. Це, а також порівняння значень функції максимальної правдоподібності, критеріїв Акайке і Шварца говорить про те, що найбільш адекватно зміни ПФТС-індексу описує GARCH(1,1)-модель.

Знайдемо довгостроковий рівень дисперсії

$$V = \frac{w}{1-\alpha-\beta} = 0.00192$$ (рис. 4)

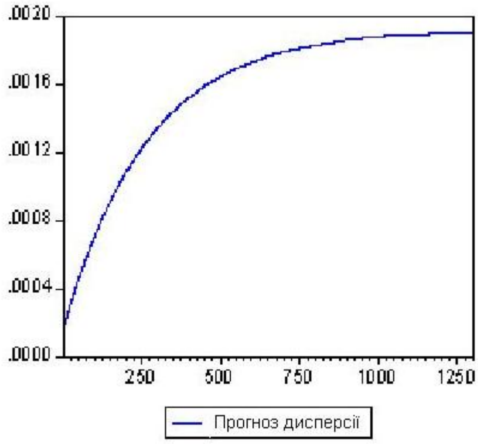

Рис. 4. Довгостроковий рівень дисперсії

Це припускає довгострокову волатильність 4.37% за день, 9.8% за тиждень (5 торгових днів у тижні), 70.6% за рік (52 тижня в році).

Тепер спробуємо оцінити вплив волатильності на доходність ПФТС-індексу за допомогою M-GARCH(1,1)-моделі:

Таблиця 6. Результати оцінки M-GARCH(1,1)-моделі в EViews

1299 спостережень

Конвергенція досягається після 30 ітерацій

	Коефіцієнт	Станд. похибка	z-статистика	Ймов.
SQR(GARCH)	-0.159101	0.067388	-2.360972	0.0182
C	0.003422	0.001090	3.138351	0.0017
	Оцінка дисперсії			
C	7.12E-06	1.09E-06	5.540533	0.0000
ARCH(1)	0.135144	0.010252	13.23694	0.0000
GARCH(1)	0.861144	0.006257	138.7400	0.0000
R-квадрат	0.007308	Середнє значення залежної змінної		-0.000319
Скоригований R-квадрат	0.004239	Стандартне відхилення залежної змінної		0.025631
Стандартна похибка регресії	0.025577	Критерій Акайке		-5.083163
Сума квадратів залишків	0.846498	Критерій Шварца		-5.063266
Функція правдоподібності	3306.515	F-статистика		2.381569
Статистика Дурбіна-Ватсона	2.420335	Ймов.(F-статистика)		0.049774

Сподівана доходність акцій залежить від сподіваного ризику, причому ARCH-in-the-mean ефект (вплив ARCH-компоненти на доходність) є значимим, що свідчить про зворотній зв'язок між доходністю і волатильністю (ризиком).

Останні 173 спостереження часового ряду були використані для "ex post" прогнозування, при цьому найбільша увага була приділена прогнозу волатильності. Графіки прогнозованого періоду показують, що інтервальна оцінка доходності на рівні 90% не є постійною у випадку всіх трьох моделей і бере до уваги зміну дисперсії змінної (рис. 5, рис. 6 і рис. 7). Це означає, що на відміну від класичних підходів, що базуються на припущенні постійної дисперсії випадкової компоненти, GARCH, TGARCH і EGARCH моделі реагують на реальні зміни у волотильності доходностей.

Висновки

Стандартні методи оцінки волатильності припускають її постійний рівень, а ARCH-методи дозволяють моделювати мінливість дисперсії випадкової величини, що робить їх більш придатними для прогнозування волатильності. Мінливість умовної дисперсії ПФТС-індексу може бути змодельована засобами GARCH, TGARCH і EGARCH моделей. Найкращі результати були отримані при використанні GARCH(1,1)-моделі. У розглянутому періоді існування ассиметричного ефекту (який може бути пов'язаний з "ефектом левереджа") не було підтверджено. За допомогою M-GARCH-моделі був виявлений зворотній зв'язок між доходністю індексу і його волатильністю. У майбутньому ці результати можуть бути розширені включенням інших варіантів GARCH-моделей, а запропонована методика може бути також використана для оцінки цін та волатильності інших фінансових активів.

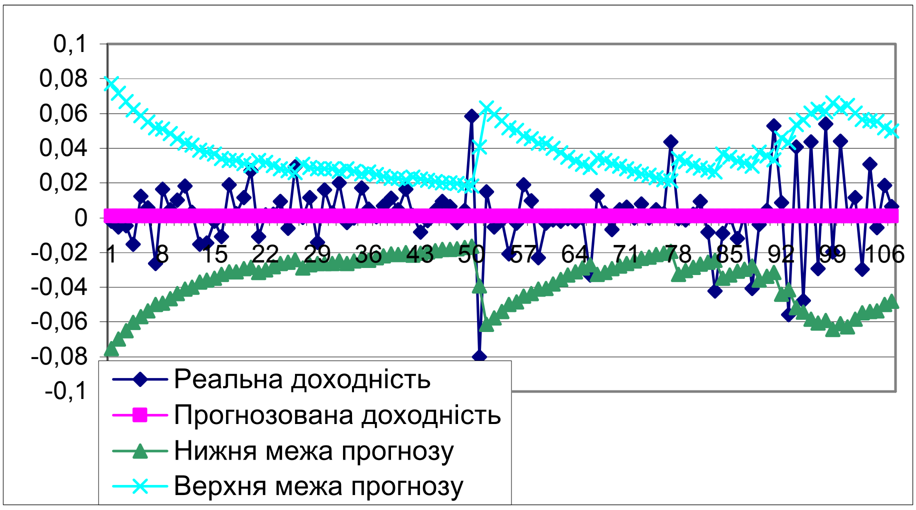

Рис. 5. "Ex post" прогноз волатильності ПФТС-індексу за моделлю GARCH(1,1)

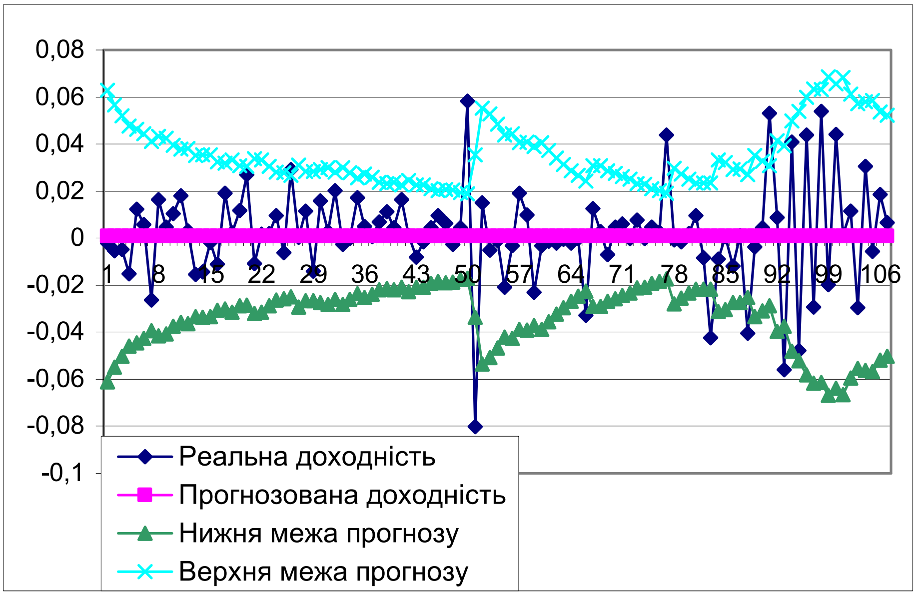

Рис. 6. "Ex post" прогноз волатильності ПФТС-індексу за моделлю EGARCH(1,1)

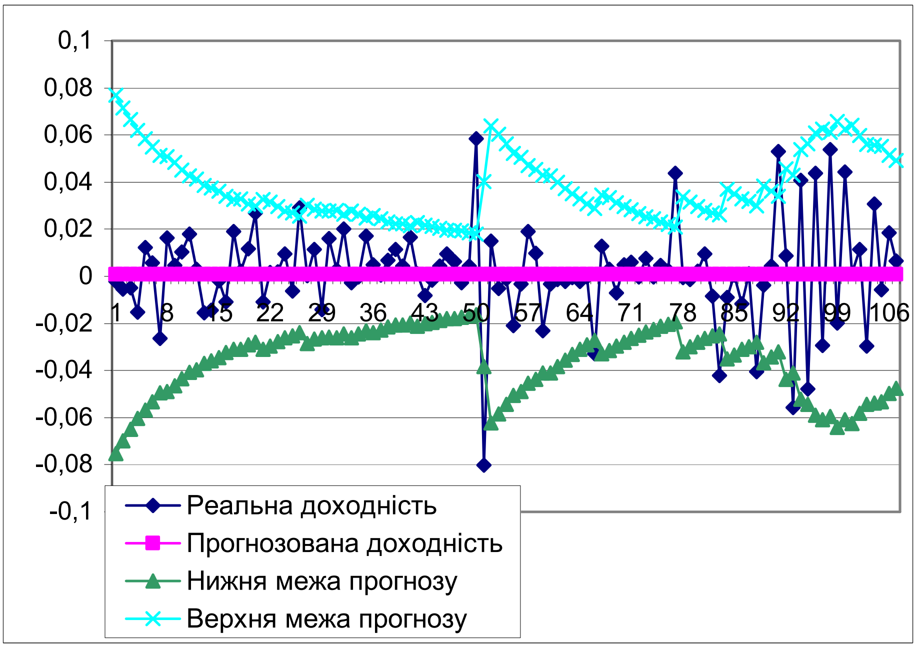

Рис. 7. "Ex post" прогноз волатильності ПФТС-індексу за моделлю GARCH(1,1)

Література:

1. Sharp W. “Capital asset price; A theory of market equilibrium under conditions of risk” // Journal of Finance,

1964, №9, 42-442.
2. Black F., Scholes M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” // Journal of Political Economy, 1973, №81, p. 637-659.
3. Engle Robert F. “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with the Estimates of the Variance of U.K. Inflation” // Econometrica, 1982, №50, p. 987-1008.
4. Bollerslev Tim “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity” // Journal of Econometrics, 1986, №31, p. 307-327.
5. Nelson Daniel B. “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach” // Econometrica, 1991, №59, p. 347-370.
6. Zakoian, J. M. “Threshold Heteroskedastic Models” // Journal of Economic Dynamics and Control, 1994, №18, p. 931-955.
7. Bollerslev Tim, Ray Y. Chou and Kenneth F. Kroner “ARCH modelling in finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence” // Journal of Econometrics, 1992, №52, p. 5-59.

Анотація

В даній статті наводиться огляд основних методів GARCH-моделювання і здійснюється аналіз можливості використання цієї методики для прогнозування українського фондового ринку на базі ПФТС-індексу. Також проводиться тестування наявності на ринку асиметричного ефекту та існування зв’язку між сподіваною доходністю індексу і його прогнозованою ризикованістю. Результатом дослідження є вибір найбільш адекватної моделі для прогнозування ПФТС-індексу та його волатильності.

Annotation

This article is devoted to the basic methods of the GARCH-modelling and possibilities for Ukrainian stock market forecasting are analysed (on basis of PFTS-index). Also attention is given to the testing of dissymetric effect existing and reality of relation between expected return and desired variance (riskiness). The result of research is the choice of the best model for return and volatility of PFTS-index forecasting.